

பெருங்குடியில்

மகாபுரணன் (ஆர்)

இ ய க் க வி ய ல்

(DYNAMICS)

(பட்டப்படிப்புக்குரிய சிறப்புப்பாடம்)

ஆசிரியர்கள்

திரு. சூர். மகாதேவலீ, எம்.ஏ., எம்.பி.,
கணிதப் பேராசிரியர்,
மாநிலக் கல்லூரி, சென்னை.

திரு. க. சிவசுப்பிரமணியம், எம்.ஏ.,
கணித இணைப் பேராசிரியர்,
மாநிலக் கல்லூரி, சென்னை.

திரு. ப. இரா. சுப்பிரமணியம், எம்.எல்.எஸ்.,
கணித உதவிப் பேராசிரியர்,
மாநிலக் கல்லூரி, சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—June, 1971

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 265

© Tamil Nadu Text Book Society

DYNAMICS (Major)

R. MAHADEVAN,

K. SIVASUBRAMANIAM,

B. R. SUBRAMANIAM.

Net Price Rs. 7.00

(NO DISCOUNT)

Printed by
Kabeer Printing Works,
Madras-5

அணித்துறை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியல்

(தமிழகக் கல்வி-உள்ளாட்சித்துறை அமைச்சர்)

தமிழகக் கல்வாசிக் கல்வி மொழியாக ஆங்கிலப் பதினேஞர் ஆண்டுகள் ஆகியுள்ளது. குறிப்பிட்ட சில கல்வாசிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுக்கொண்டனர். 1963ஆம் ஆண்டில் தொடக்கத்தில் புகழக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1965ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப்படிப்பு வகுப்புகளிலும் விஞ்ஞானப் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்வாசி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், சிறு பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் மிதந்தெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் தங்கள் எழுதித் தர முன்வந்த துணைக்கிராமத் தொண்டினரின் உதவி ஆகியன காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மலிந்திருக்கும் மன நிலைகளும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகைகளில், கல்வாசிப் பேராசிரியர்கள் கல்வி, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்களுக்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக் கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமூலத்தையக் குறிப்பிட்டுச் சொல்வதன்மேலும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிநிலைகளையே சூழிய காலத்தில் அரிய முறையில் தூக்கம் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், சத்துவம், புவிப்பியல், கணிதம், பொருளியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புவிவியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி தூக்கம், மொழி பெயர்ப்பு தூக்கம் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்தரட்டுப் பாடதூக் திறவனம் தூக்கம் வெளியிட்டுவருகிறது.

கிவந்தும் ஒன்று 'இயக்கவியல்' என்ற கிந்தனம் தமிழ்தரட்டுப் பாடதூக் திறவனத்தின் 265ஆவது வெளியீடாகும். கிவவனம் 300 தூக்கம் வெளியிட்டுவருகிறது.

உழைப்பின் வரலா உருவிகள் கிவ்வ; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழகப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த கிவ் பெறவேண்டும். அதுவே தமிழகவியலின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்தரட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களில் பரவலாக உதவியுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த தனி உசித் தராக.

இரா. நெடுஞ்செழியல்

பொருளடக்கம்

	பக்கம்
1. மூன்றுதர	1
2. திசைவேகமும் முடுக்கமும் (Velocity and Acceleration)	5
3. நேர்த்தரப்பயக்கம் (Rectilinear Motion)	46
4. இயக்க விதிகள் (Laws of Motion)	69
5. எதிர்பொருக்கள் (Projectiles)	121
6. தாக்கத்திற்கு விசைகள் (Impulsive Forces)	184
7. மீள் இயல்புடைய பொருக்கள்	197
8. வட்ட இயக்கம் (Circular Motion)	218
9. மைய விசைகள்—மைய ஒழுக்குகள் (Central Forces and Central Orbits)	283
10. தனிபரிசை இயக்கம் (Simple Harmonic Motion)	316
11. திசையற்ற திருப்பத்திசை (Moment of Inertia)	362
12. ஒரு திசையற்ற கத்திய விநாற்பொருள் இயக்கம் (Motion of a rigid body about a fixed axis)	377

இயக்கவியல்

1. முன்னுரை

1. இயக்கவியலின் வரையறை (Dynamics: Definition):
இயத்திரவியலின் நோக்கமே பொருள்களின் இயக்கங்களின் (Motions) ஆராய்வு அவற்றைப்பற்றிய உண்மைகளைக் கவனமான முறையில் விளக்குவதேயாகும். மேலும், உண்டாக்கப்பட்டிருந்து பொதுப் படைப்பான கருத்துகளை உருவாக்கி மற்றப் பொருள்களின் இயக்கங்களைப் பற்றி முன்கூட்டியே கூற முடியுமென நிறை நோக்கமாகும்.

இயந்தகவியல் திரும்பும் இயக்கங்களை யாவும் பொருள்களுக்கிடையே திரும்பும் வினை, அதனால் உண்டாகும் எதிர்வினை முதலியவற்றை எதிர்ப்புறமாகும். இயக்கங்களின் காரணங்களை ஆராய்ந்து, பொருள்களின் இயக்கங்களைமட்டும் விவரித்துக் கூறும் இயத்திரவியலின் பகுதியை இயக்கவியல் (Kinematics) என்றும், பொருள்களுக்கிடையே யுள்ள தொடர்பும் அதனால் திரும்பும் இயக்கங்களையும் பற்றி ஆராயும் பகுதியை இயக்கவியல் (Kinetics) என்றும் கூறலாம். இந்த இரு பகுதிகளையும் சேர்த்து இயக்கவியல் (Dynamics) என்று சொல்லுவது மரபு.

2. இயக்கவியலில்பற்றிப் படிப்பதன் நோக்கம்: இயக்கவியலில்பற்றிப் படிப்பதன் காரணங்கள் குறைந்தது மூன்று உண்டு. (1) இயத்திர உலகில் நாம் ஓரளவுக்கு நிறை அடிப்படையில் நத்துவதில் உண்டாக்கித் தெரிந்திருக்க வேண்டியது கிடைப்பதேயாகும். (2) பொருள்களின் (Physics), வானியல் (Astronomy) முதலியவற்றில் பற்றி அலசியல் தெரிந்திருக்க வேண்டிய நாம் அவைகளின் அடிப்படையில் சொற்கள்களைக்கொண்ட இயக்கவியலில்பற்றி அறிந்து கொள்வது முக்கியமாகும். இயக்கவியலில் கடைப்பிடிக்கும் தர்க்கரீதி என்னும் சொல்லுதலும் முறைகளும் எப்போதும் கணித வல்லுநர்களுக்கு அதன்மேல் ஒரு அடிப்படையாக உண்டாக்கியிருக்கிறது.

3. உருவாக்கப்பட்டிருக்கும் முறை: இயக்கவியல் ஆராய்ச்சி வான்கள் வடிவ கணித முறை (Geometrical method), பொருள்கள்

முறை (Physical method) என்ற மிகு முறைகளையும் கையாண்டு வருகிறார்கள்.

முதலில் நியூட்டனியல் அமைந்த அம்சம் மனிதன் உருவாக்கிய பொருள்களின் செயல்முறைகளையும் அதன் விதிகளையும் ஆராய்கிறார்கள். அதன்மூலம் கொடுக்கப்பட்ட திபத்தனைகளுக்குக் கட்டுப்பட்டுச் செயலாற்றக்கூடிய பொருள்களின் நியூட்டனியல்பற்றி முன்கூட்டியே கூற முடியுகிறார்கள். மிகை பொதுவான முறை என்னும். செயல்பாதி யாமலேயே பொதுவான ஆராய்ச்சியாளர்கள், வானியல் ஆராய்ச்சியாளர்கள், பொறியியல் வல்லுனர்கள் முதலானோர் பொதுவான முறையிலிருந்து வடிவ கணித முறைக்கு மாறுகிறார்கள். உதாரணமாக வானியல் ஆராய்ச்சியாளர்கள் புவியை ஒரு வடிவ கணிதக் கோளமாகவோ அல்லது தீவனமாகவோ கருதுகிறார்கள். உண்மையில் புவியின் உருவம் அவ்வளவு எளிதான வடிவங்களால் குறிக்க இயலாது. அநேகமாக பொறியியல் வல்லுனர்கள் ஒரு சக்கரத்தை வடிவ கணித வட்டமாகக்கொண்டு ஆராய்கிறார்கள். நியூட்டனியல் திரும்பும் நியூட்டனியல் வடிவம் பரதரப்பட்ட பொருள்களின் சேர்க்கையினாலும், எதிர் வினைகளினாலும் தாக்கப்படுகின்றன. அந்த நியூட்டனியல்பற்றி ஆராயும்போது அவசியமில்லாதவற்றை நீக்கி மற்றவைகளைக்கொண்டு முடிவுகளை உருவாக்குவது சிறந்த முறை. நியூட்டனியல் உண்மையான விதர்ப்பு பொருளாக (Rigid body), திட்ட நியூட்டனியல் தூண்டு (Inelastic string) கிடையாது. மிகுத்தம் அப்படிப்பட்ட சாதனங்களைக்கொண்டு நியூட்டனியல் முதலில் ஆராய்ந்து பின் பொருளில் ஏற்படும் மாறுதல், தூண்டு ஏற்படும் திட்டம் நிலைகளால் நியூட்டனியல் அப்படிப் பொருள்களப்படுகிறது என்று கண்டபடிதான் நியூட்டனியல் முறையாகும்.

4. நியூட்டனியலின் தத்துவம்: பரவலான செயல்முறைகளைக் கொண்டு நியூட்டனியலின் தத்துவங்கள் உருவாக்கப்பட்டிருக்கின்றன. சூழிப்பாக, கலிலியோ (Galileo), நியூட்டன் (Newton), கெப்ளர் (Kepler) போன்ற விஞ்ஞானிகளின் சிறப்புக்குரிய சோதனைகளின் முடிவுகளே நியூட்டனியலின் அடிப்படைத் தத்துவங்கள் என்று கூறினார்கள். ஒவ்வொரு வேகத்துடன் ஒப்பிடுகிறபோது மிகக் குறைவாக உள்ள வேகத்துடன் நியூட்டனியல் பொருள்களுக்கு நியூட்டனியல் விதிகள் பொருத்தமின்றன. அந்த விதிகளைக் கணித ரீதியாக நிரூபிக்க இயலாது. ஆனால், செயல்முறையின்போது கிடைக்கும் முடிவுகள் அந்த விதிகளைச் சாத்திரப்படுத்தக் கண்டபடிதான் உருவாக்கப்பட்ட பொருள்களின் நியூட்டனியல்பற்றி முன்கூட்டியே கூற முடியுகின்றன.

5. நியூட்டனியலுக்கு ஆதாரமானவை: 1. துகள் (Particle), 2. திணிவு (Mass), 3. விசை (Force), 4. விதர்ப்பு பொருள், 5. குறிப்பிட்ட சூழ்நிலை நியூட்டனியலுக்கு ஆதாரமானவைகள்.

(1) **துகை:** விதைப் பரிமாணமேயில்லாத ஒரு பொருளாகக் கருதுவது வடிவ வணிக முறையாகும். இதில் புள்ளியை எப்படி வரையறுக்கிறோமோ அதேபோல் கிபக்கவியலில் துகளைக் கருதுகிறோம். பரிமாணமேயில்லாத துகளுக்கு ஒரு நிர்வாகண நிலம் உண்டு என்பது அடிப்படைத் தத்துவமாகும்.

(2) **திணிவு:** அளவிலும் உருவத்திலும் ஒரே மாதிரியாகவுள்ள நன்கக் கட்டிகள் மீண்டும் செய்முறைகளின்போது ஒரே முடிவுகளைக் கொடுக்கும் என்பது தெளிவு. ஆனால் அளவு, உருவம் கிணவனில் மாறுபட்ட வெவ்வேறு பொருள்கள், கிபக்கவியல் செய்முறைகளின் போது ஒரே முடிவைக் கொடுப்பது வித்தையென்றாலும் உண்மை என்பது கனிகூடாகக் காணும் நிஷ்சரி. கிப்படிப்பட்ட பொருள்களை கிபக்க சமம் என்று கூறலும் அந்த கிபக்க சமத்திற்கு அடிப்படையான பொருள்களிடையேயுள்ள சமத்துவத்தைத் திணிவு என்கிறோம்.

(3) **விசை:** ஒரு பொருளின் கிபக்கத்தை மாற்றக்கூடிய செயலை ஈர்ப்புவிசை என்கிறோம். அதேபோல் பொருளின் கிபக்கத்தைப் பூமி விசை சக்தியினால் மாற்றமுடியுமென்பது தெளிவு. அப்போது பொருளின் மீது கிபங்கு விசையைப் பொருளின் நிறை என்கிறோம். எனவே, பொருளின் நிறை பூமியில் அதன் கிபத்தைப் பொறுத்தது. பூமியின் ஈர்ப்புச் சக்தியை ஈர்ப்புச் சக்தி முடுக்கம் 'g' என்று குறிக்கிறோம். செய்முறைகளின்படி h உயரத்தில் ற அளவிற்குள்ள கிபத்தில் $g = 32.089 [1 + 0.00524 \sin^2 \phi] [1 - 0.000000096 h]$ அடி/(விநாடி)² ஆகும். ஆனால் ஓக்கு 32 அடி/(விநாடி)² என்ற மதிப்பைக் கொடுப்பது ஒரு நல்ல தோராயமாகும்.

(4) **விதைப்புப் பொருள்கள்:** கிபத்தைவிடவுள்ள பொருள்கள் சரிவாரப்போல் மிகுதுவாகவும் கிசும்பைப்போல் ஷுனமாகவும் கிசுக்கலாம். மிகக் ஷுனமான பொருளுக்கும்கூட அதிச அளவுள்ள விசையினால் அதன் உருவமும் அளவும் மாறக்கூடும். ஆனால், பரிமாணமேயில்லாத பொருளாகத் துகளைக் கருதுவது போல் விதைப்புப் பொருளை அளவு, உருவம் எதிலும் மாறாத ஒன்றாகக் கருதுவது கிபக்கவியலின் அடிப்படைக் கொள்கைகளில் ஒன்றாகும்.

(5) **குறியிட்டசை:** நடைமுறையில் திசையும் திசுற்ச்சினைப்பற்றிக் கூறும்போது கிடம், ளளம் கிணவனைப்பற்றி விவரிக்கிறோம். கிடம் என்றும்போது பூமியைப் பொறுத்தது திசுற்ச்சி நடக்கும் கிடத்தின் அளவிற்கு, நெட்டாங்கு கிணவனைக் குறித்தால் போதும். கிங்குப் பூமியைக் குறியிட்டசாகக் கொள்கிறோம். ஆனால், வானியலில் குறிப் பிட்ட நட்சத்திரங்களைப் பொறுத்தது, தூரங்களை அளப்பது உண்டு. கிங்கு அந்த நட்சத்திரங்களைக் குறியிட்டசாகக் கருதலாம். எப்படி

யாவியும் ஒரு சூழிப்பெட்ட பொருளைக் சூழியிட்டதாகக் கொண்டு மற்றப் பொருளுக்கிடம் விபக்கிக்கிறப்பற்றி ஆராய்வோம்.

(6) காலம்: நடக்கும் திகழ்ச்சிக்கு கீடம் மட்டும் முக்கியமாகிறது. காலமும் அவசியமற்றது. காலக்கூன் மனமும்போதும் கால கிடைமெளகிக் மனமும்போதும் செம்முறை முடிவுகள் மாறலாம். ஒரு செம் முறைமைத் திரும்பத் திரும்பச் செம்முறைக்கீ கொள்வோம். முதல் செம்முறை முடிந்தவுடன் அடுத்த செம்முறை ஆரம்பிப்பதாக எடுத்துக் கொண்டால் முதல் செம்முறை ஆரம்பிக்கும் நேரத்தை $t=0$ என்றும், கிரண்டாவது செம்முறை ஆரம்பிக்கும் நேரத்தை $t=1$ என்றும், மூன்றாவது ஆரம்பிக்கும் நேரத்தை $t=2$ என்றும் குறிப்போம். கிப்படிப்பட்ட செம்முறையில் கொடுக்கப்பட்ட அளவு நேரத்தை நியூட்டோனியன் அளவு என்கிறோம். ஆனால் வழக்கத்தில் காலத்தின் அளவு விதாடியாகும். விதாடி என்பது குறித்து நாலில் 86,400 பகுதியில் ஒன்றாகும். [அதேபோல் C.G.S. முறையில் அளவின் அளவு கிட்டி என்பது நிறைக்க அளவுகள் கிடைவனாகான சர்வதேசக் குழு 0°C உடினத்தில் வைத்திருக்கும் கிடு மிண்டினம் - கிடுடியம் துண்டுகளுக்கிடையேயுள்ள தூரமேயாகும்.]

(7) அளவுகள் (Units): தினிவு அளவு, காலம் கிடைக்கிறப் பற்றி ஆராய்ந்தோம். அதன் அளவுகள் C.G.S., F.P.S. முறையில் கீழே உள்ளன.

	C.G.S.	F.P.S.
நீளம்	செ.மீ.	அடி
தினியு	கிராம்	பவுண்டு
காலம்	விதாடி	விதாடி

2. திசைவேகமும் முடுக்கமும் (Velocity and Acceleration)

வேகம் (Speed)

வரையறை: ஒரு நகரும் புள்ளி அதன் பாதையை நிர்ணயிக்கும் விதத்தை வேகம் என்கிறோம். வேகம் இயக்கத்தில் திசையைப்பற்றி ஆராயாமல் இயக்கத்தில் வீதத்தை மட்டும் குறிக்கிறது. அதாவது வேகத்திற்கு அளவுண்டு; ஆனால், திசை கிடையாது.

திசையைப் பொறுத்து அமைப்பாமல் அதன் அளவை மட்டும் பொறுத்திருக்கும் அளவியத்தை எண்கணியமென்கிறோம். எனவே, வேகம் ஓர் எண்கணியமாகும். எண்கணியத்தில் மற்ற உதாரணங்கள்: நிலையு, தூரம், அடர்த்தி (density), நேரம் இவைகளாகும்.

நேரங்களின் அளவுகள் எவ்வளவு குறுகியதாக இருந்தாலும் சம நேரத்தில் பாதையில் சம திசைகளை ஒரு புள்ளி கடக்குமானால், அந்தப் புள்ளி ஒரே சீரான வேகத்தில் (uniform speed) சென்றுகிறதெனலாம்.

ஒரே சீரான நிலையில் இருக்கும்போது ஒரு புள்ளியின் வேகம், நேரத்தின் ஓர் அலகில் எவ்வளவு தூரம் சென்றிருக்கிறதென்பதே யாகும்.

ஒரு குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் நகரும் புள்ளியின் சராசரி வேகத்தைக் கண்டுபிடிக்கப் புள்ளி சென்றிருக்கும் தூரத்தை இடைவெளி நேரத்தால் வகுக்கவேண்டும்.

குறிப்பு: ஓர் மீரயில் மணிக்கு 60 கி.மீ. வேகத்தில் சென்றுகிறதென்று சொன்னால், அதாவது வேகம் நிலையாக இருந்தால் ஒரு மணிமீல் 60 கி.மீ. தூரம் சென்றிருக்கும். வேகம் ஒரே சீரான நிலையில் இருக்க வேண்டுமானால் ஒரு நிமிடத்துக்கு 1 கி.மீ. ஒரு விநாடிக்கு 2 1/2 கி. சென்றிருக்க வேண்டுமென்றுகிறது.

1.1. ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் வேகத்தின் அளவை

வரையறை: குறிப்பிட்ட நேரத்துக்கு அடுத்த 't' நேரத்தில் 's' தூரம் ஒரு புள்ளி சென்றிருக்குமானால் 't' நேரத்தை மெய்யாகக் கிழிவதாகக் கொள்ளும்போது $\frac{s}{t}$ -ன் வரம்பு வேகத்தின் அளவைவரும்.

வகை துண்கணித (Differential calculus) முறைப்படி ஒரு புள்ளி 't' நேரத்தில் 's' தூரம் செல்லுவதாகவும், 't + Δt' நேரத்தில் 's + Δs' தூரம் செல்வதாகவும் கொண்டால் திசைவேகத்தின் அளவை

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \text{ எனும்.}$$

1.2. நேரம், தூரம் இவைகளின் அலகுகள்

1. C.G.S. முறைப்படி நேரத்தின் அலகை விநாடியாகவும் தூரத்தின் அலகை செ.மீ. ஆகவும் கொள்ளவேண்டும்.

2. F.P.S. முறைப்படி நேரத்தின் அலகை விநாடியாகவும் தூரத்தின் அலகை அடியாகவும் கொள்ளவேண்டும்.

நாட்டில் கிப்போது பழக்கத்திலுள்ள C.G.S. முறையை நாம் கிடைப்பதுவோக்.

அவரு நேரத்தில், தூரத்தில் ஒர் அவரு தூரம் செல்லும் புள்ளியின் வேகத்தை, வேகத்தின் அவசனவாக. அதாவது ஒரு புள்ளி 'u' வேகத்தில் சென்றால், அவரு நேரத்தில் u அவரு தூரம் புள்ளி நகர்த்திக்குக்கும். எனவே 't' அவரு நேரத்தில் புள்ளி 'ut' அவரு தூரம் நகர்த்திக்குக்கும். புள்ளி நகர்த்த தூரத்தை 's' என்று கொண்டால் $s = ut$ என்றாகிறது.

2. இடப்பெயர்ச்சி (Displacement)

ஒரு நகரும் புள்ளியின் இடப்பெயர்ச்சியானது அதன் நிலைக்கு ஏற்படும் மாறுதலையே குறிக்கும். புள்ளியின் நிலையில் மாறுதல் ஏற்படுகின்றபோது அந்தப் புள்ளி எல்லாவறு தூரம் சென்றிருக்கிறது, எந்தத் திசையில் சென்றிருக்கிறது என்ற கிடை வித்தியாசங்களைக் கவனிக்க வேண்டும். எனவே, புள்ளியின் இடப்பெயர்ச்சி திசை, திசைத்தன் அளவை இவைகள் கிரண்டைடும் பொதுத்திருக்கிறது.

உதாரணமாக ஒரு மோட்டார் காச் 120 கி.மீ. நேர் வடக்காகச் சென்று பின் 50 கி.மீ. நேர் கிழக்கே சென்றால் அந்தக் காசின் இடப் பெயர்ச்சி புறப்பட்ட இடத்திலிருந்து 130 கி.மீ. தூரத்திலுள்ளது.

திசைவேகமும் முடுக்கமும்

அதன் திசை வட்டக்கிணுத்து கிழக்குப் பக்கமாக " $\tan^{-1} \frac{3}{4}$ " கோணத்திலுள்ளது என்பிடுமும்.

3. திசைவேகம் (Velocity)

வரையறை : நகரும் புள்ளியின் கிடப்பெயர்ச்சியின் வீதமே, திசைவேகமாகும்.

எனவே திசைவேகத்திற்கும், திசையும் தீவத்தின் அளவும் உண்டு.

குறிப்பு : திசையும், அளவுமுள்ள கணியத்தை வெக்டர் கணியம் என்கிறோம். அதனும் திசைவேகம் ஒரு வெக்டர் கணியமாகும்.

எவ்வளவு சிதியதாக இருந்தாலும் அப்படிப்பட்ட சமநேரத்தில் சம தூரங்களை நியோக திசையில் ஒரு புள்ளி கடந்தால் அந்தப் புள்ளி ஒரே சீரான திசைவேகத்தைபுடையதென்கிறோம்.

அதாவது திசைவேகம் ஒரே சீராகவுள்ளபோது ஓர் அளவு நேரத்தில் ஏற்படும் கிடப்பெயர்ச்சியின் அளவைக்கொண்டு திசை வேகத்தைக் குறிக்கிறோம். அப்படியில்லாதபோது ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் ஒரு புள்ளியின் திசைவேகத்தைக் கிழக்காடவாது காணலாம் : குறிப்பிட்ட நேரத்துக்கு அடுத்த 't' நேரத்தில் 'x' கிடப்பெயர்ச்சி அடைந்திருக்குமானால், 't' நேரத்தை மிகமிகச் சிதியதாகக்கொள்ளும்போது $\frac{x}{t}$ -ன் வரம்பே திசைவேகத்தின் அளவை யாகும்.

வகை துண்கணிய முறைப்படி ஒரு புள்ளி 't' நேரத்தில் 'x' கிடப்பெயர்ச்சி அடைவதாகவும் 't + Δt' நேரத்தில் 'x + Δx' கிடப்பெயர்ச்சி அடைவதாகவும் கொண்டால், திசைவேகத்தின் அளவை

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \text{ யே யாகும்.}$$

3.1. அளவு

சாதாரணமாகத் திசைவேகத்தை மணிக்கு கி.மீ. வேகம்மென்று, அல்லது விநாடிக்கு கி.மீ. வேகம்மென்றே குறிக்கிறோம்.

குறிப்பு : வேகத்திற்கும் திசைவேகத்திற்குமுள்ள வித்தியாசத்தைச் சற்று ஆராய்வோம். வேகம் ஒரு எண்கணியமாகும். ஆனால், திசைவேகம் ஒரு வெக்டர் கணியமாகும். நகரும் புள்ளி ஒரு நேர்க்கோட்டில் செல்லும்போது அதாவது ஒரே திசையில் செல்லும்

பொது வேகமும் திசைவேகமும் ஒன்றேயாகும். அப்படி யின்றி நகரும் புள்ளி ஒரு வட்டத்தில் ஓரே சீராக நகருவதாகக் கொள்ளுவோம். அப்பொழுது புள்ளி யின்மீது எமநேரத்திற் எமநேரத்தில் கடக்கிற நெக்சிசெனும், (அந்நேரம் எவ்வளவு குறைவாக இருந்தாலும் தவறில்லை). ஆனும் புள்ளி நகரும் திசை, நேரத்திற்கு நேரம் மாறுபடுகிறது. ஏனெனில் புள்ளியின் திசை அந்நேர புள்ளியில் வட்டத்திற்கு வளைவப்படுகின்றனவோடும் திசையேயாகும். எனவே, மீத உதாரணத்தில் வேகம் மாறிவிடாது, திசைவேகம் மாறி யாகவும் இருப்பதைக் காண்கிறோம்.

அங்கு நேரத்தில் ஒரு புள்ளி ஓர் அங்கு தூரத்திற்குச் சமமான இடப்பெயர்ச்சியை அடைவதும்பொது ஏற்படும் திசைவேகத்தின் அளவை, அங்கு திசைவேகம் என்கிறோம்.

திசையும் நீளத்தின் அளவும் தெரியும்பொது ஒரு புள்ளியின் திசை வேகத்தைக் கணிக்கலாம். ஆகவே நகரும் புள்ளியின் திசைவேகத்தை AB என்ற நேர்க்கோட்டில் குறிக்கலாம். அதாவது நகரும் புள்ளியின் திசைவேகங்களை AB, CD என்ற நேர்க்கோட்டில் குறித்தால், புள்ளி கள் AB, CD என்ற திசைகளில் நகருகின்றன என்றும், வேகத்தின் அளவைகள் AB, CD நேர்க்கோடுகளின் நீளங்களுக்கு மீத எமகூட. எனவும் கொள்ளலாம்.

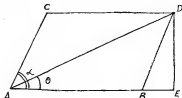
ஒரு பொருளுக்கு ஓரே சமயத்தில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட திசை வேகங்கள் இருக்கலாம். உதாரணமாக நகரும் கிரயில் வண்டிகளுக்கு இருக்கும் ஒரு சிறுவன் ஒருவதாக வைத்துக்கொள்வோம். அவனுக்கு, வண்டியுடன் ஓர் நியக்கமும், அவன் ஒருவதாக உண்டாகிற ஓர் நியக்கமும் உண்டு. மீத இரு நியக்கங்களையும் கூட்டுகிறபொது ஏற் படும் நியக்கமே, அவனுக்கு முப்பரிமாண வேகமில் ஏற்படும் நியக்க மாகும்.

இரு திசைவேகங்களுக்குச் சமமாகவுள்ள திசைவேகத்தை எப்படிக் கண்டுபிடிப்பதென்பதைக் காண்போம்.

3-2. திசைவேகங்களின் இணைகர விதி (Parallelogram law of velocities)

ஒரு நகரும் புள்ளியின் திசைவேகங்களின் திசைகளையும் நீளங் களின் அளவுகளையும் ஓர் இணைகரத்தின் மூலையிலிருந்து வரக் கொள்ளும் இரு பக்கங்களால் குறித்தால் அம் மூலையிலிருந்து வரும் இணைகரத் தின் மூலையிலிருந்து நீளம், திசை, திசைவேகங்களின் வெக்டார் கூட்டுத்தொகையின் நீளத்தையும், திசையையும் குறிக்கின்றன.

ஒரு நாளும் புள்ளியின் திசைவேகங்களை AB , AC என்ற இரு நேர்க்கோடுகளாக விகிதகவரம். வேகங்களின் அளவைகள் 'u', 'v' எனக் கொள்க. $ABDC$ என்ற வில்லைவடிவத்தைப் பூர்த்தி செய்க.



படம் 1.

புள்ளியின் இயக்கம் 'u' திசைவேகத்துடன் AB என்ற நேர்க்கோட்டில் அமைவதாகக் கொண்டால் AB என்ற நேர்க்கோடு அதற்கு வில்லையாக இயங்குகிறது. அப்போது A என்ற புள்ளி 'V' என்ற திசைவேகத்துடன் AC என்ற நேர்க்கோட்டில் இயங்கும். அவரு நேரத்தில் A என்ற புள்ளி AB நேர்க்கோட்டில், AB தூரம் சென்று B ஐ அடைவும். அதே நேரத்தில் AB அதற்கு வில்லையாக நகர்ந்து CD ஐ அடையும். அதாவது 'A' புள்ளி B ஐ அடைவதற்கு 'B' புள்ளி D புள்ளிக்கு விடம் மூலியிலும். எனவே A என்ற புள்ளி கடைசியாக D புள்ளியைச் செரும்.

மற்ற இரு திசைவேகங்கள் திசைகளிலும், தீச அளவுகளிலும் மாதிவியாக இருப்பதால் A என்ற புள்ளியிலிருந்து D என்ற புள்ளிக்குச் செல்லும் புள்ளியின் திசைவேகம் மூலியியாகும். எனவே AD அந்தத் திசைவேகத்தை முழுமையாகக் குறிக்கும்.

2.3. விளைவு, கூறு (Resultant, Component)

வரையறை : ஒரு திசைவேகம் மூன்று அல்லது அந்தக்கு மேற்பட்ட திசைவேகங்களுக்குச் சமமானால் அந்தத் திசைவேகத்தை மற்றவைகளின் விளைவு என்றும் மற்றத் திசைவேகங்களை விளைவின் கூறுகளென்றும் கூறலாம்.

விடைவேவுகளின் கோணம் 'α' என்றால் திசைவேகங்களைக் கொண்ட திசைவேகங்கள் 'u', 'v' என்றும் அந்தத் திசைவேகங்களின் விளைவைக் கண்டுபிடி.

படம் 1-ல் AB , AC என்ற கோடுகள் u , V என்ற திசைவேகங்களை விளக்கும். $\angle BAC = \alpha$ என்று கொள்வோம்.

$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cos \angle ABD$. AD என்ற நேர் கோடு நினைவிற்கும் விசையு திசைவேகத்தை ' W ' என்று கொண்டால்

$$W^2 = u^2 + V^2 + 2uV \cdot \cos \alpha \quad [\because \angle ABD = 180^\circ - \alpha]$$

$$\text{மேலும்} \quad \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle ABD} = \frac{BD}{AB}$$

$$\frac{\sin \theta}{\sin (\alpha - \theta)} = \frac{V}{u} \quad [\angle BAD = \theta \text{ எனக் கொள்வோம்}]$$

$$\sin \alpha \cos \theta - \cos \alpha \sin \theta = \frac{V}{u}$$

$$u \tan \theta = V \sin \alpha - V \cos \alpha \cdot \tan \theta$$

$$\therefore \tan \theta [u + V \cos \alpha] = V \sin \alpha \text{ எனவே}$$

$$\tan \theta = \frac{V \sin \alpha}{u + V \cos \alpha} \text{ ஆகும்.}$$

' α ' கோணத்தை நிலையே கொண்ட ' u ', ' V ' என்ற இரு திசைவேகங்களில் விசையு $\sqrt{u^2 + V^2 + 2uV \cos \alpha}$ என்ற அளவையும், ' u ' திசைவேகத்தின் திசைக்கு $\tan^{-1} \left(\frac{V \sin \alpha}{u + V \cos \alpha} \right)$ என்ற கோணத்தின் சாய்ந்திருக்கும் திசையையும் கொண்டது.

குறிப்பு : ஒரு திசைவேகத்தை இரு கூறுகளாக எதற்களையோ வழிகளில் பிரிக்கலாம். ஏனெனில், AD ஸ் மூலவிட்டமாகக் கொண்ட நிலைகரங்களை ஏராளமாகும். அவைகளில் $ABCD$ ஒர் நிலைகரமாக இருக்கிறது. AB , AC என்ற கூறு திசைவேகங்களாகப் பிரிக்கலாம்.

இத்தனை நிலைகரங்களில் AD ஸ் மூலவிட்டமாகக் கொண்ட நிலை சதுரத்தைக் கவனிப்போம். அப்போது கூறு திசைவேகங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமைகின்றன.

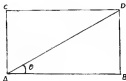
$$\angle BAD = \theta \text{ என்றால்}$$

$$AB = AD \cos \theta = W \cos \theta$$

$$AC = AD \sin \theta = W \sin \theta$$

எனவே ' W ' என்ற திசைவேகம் அதன் திசைக்கு θ கோணத்தை உண்டாக்கும் திசையிலுள்ள திசைவேகம் ' $W \cos \theta$ ' எனவும் ஆகவே

மூலக் கூறுகளுக்கும் செங்குத்தான திசையிலுள்ள திசைவேகம் ' $W \sin \theta$ ' எனவும் மிகு கூறுகளாகப் பிரிக்கலாம்.



படம் 2.

' W ' என்ற திசைவேகத்தை அதன் திசைக்கு α , β என்ற கோணங்களை உண்டாக்கும் திசைகளில் வரையப்படும் திசைவேகங்களாகக் காட்டுவோம். ' W ' என்ற திசைவேகத்தை AD என்ற நேர்க்கோடு, திசையிலும் நீளத்தின் அளவையிலும் குறிக்கும். AD -க்கு அதன்



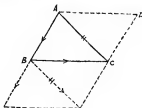
படம் 3.

மிகு பக்கங்களிலும், பக்கத்துக்களையுள்ள α , β என்ற கோணங்களை உண்டாக்கும் AB , AC என்ற நேர்க்கோடுகள் வரை. D என்ற புள்ளியின் வழியாக CA -க்கு இணையாக DB என்ற நேர்க்கோடும் BA -க்கு இணையாக DC என்ற கோடும் வரை. இதன் மூலம் $ABCD$ என்ற இணைகரத்தைப் பூர்த்தி செய்க.

$$\begin{aligned} \frac{AB}{\sin \beta} &= \frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{AD}{\sin (\alpha + \beta)} \\ &= \frac{AD}{\sin (\alpha + \beta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore AB &= \frac{AD \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} \\
 &= \frac{W \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} \\
 AC &= BD \\
 &= \frac{AD \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)} \\
 &= \frac{W \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}
 \end{aligned}$$

8-4. திசைவேகங்களின் முக்கோண விதி (Triangle law of velocities)



படம் 4.

ஒரு முக்கோணத்தில் AB , BC என்ற இரு பக்கங்கள் விளக்கும் திசைவேகங்களை ஒரு தளமும் புள்ளி கொண்டிருந்தால் அந்தத் திசைவேகங்களை, முக்கோணத்தின் மூன்றாவது பக்கமாகிய AC விளக்கும் திசைவேகத்திற்குச் சமமாகும். AB , BC நேர்க்கோடுகளால் விளக்கப் படும் திசைவேகங்களின் விளைவு AC -ன் திசையாகவும் அதன் அளவை வாகவும் உள்வதைக் கவனிக்கவும்.

8-4-1. கிளைத்தேற்றம் 1

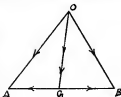
ஒரு முக்கோணத்தில் மூன்று பக்கங்களால் மூன்றையே விளக்கப் படும் திசைவேகங்களைப்போடய புள்ளி நினைவரற்றமில்லாமலிருக்கும். அதாவது AB , BC , CA என்ற நேர்க்கோடுகள் விளக்கும் திசைவேகங்களைப்போடய புள்ளி அசையாமலிருக்குமெனக் காண்க.

3-4-2. வினைத்தேற்றம் 2

$\lambda \cdot OA$, $\mu \cdot OB$ எக்டிபவகளாக வினக்டிபப்டும் திசைவேகங்களின் $(\lambda + \mu) \cdot OG$ என்ற திசைவேகத்திற்குச் சமம். [G , AB -யிளமேறுவின் ஒரு புள்ளி. மேலும்

$$\lambda \cdot AG = \mu \cdot GB \text{ -ஆகும்.}]$$

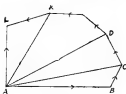
திசைவேகங்களின் மூக்டி கோண விதிப்படி $\lambda \cdot OA$ என்ற திசைவேகம், $\lambda \cdot OG$, $\lambda \cdot GA$ என்ற திசைவேகங்களுக்குச் சமம். அதே போல் $\mu \cdot OB$, $\mu \cdot OG$, $\mu \cdot GB$ என்ற திசைவேகங்களுக்குச் சமம். $\lambda \cdot GA$, $\mu \cdot GB$ என்ற திசைவேகங்கள் அளவைகளில் ஒன்றாகவும், திசையில் தேர் எதிராகவும் உள்ளதால் அவை ஒன்றையொன்று நீக்குகின்றன. எனவே வினைவு திசைவேகம் $(\lambda + \mu) \cdot OG$ -க்குச் சமம்.



படம் 5.

3-5. திசைவேகப் பலகோண விதி (Polygon law of velocities)

AB , BC , CD , ..., KL என்ற பலகோணத்தின் பக்கங்கள் வினக்டிப திசைவேகங்களை ஒரே தேரத்தில், ஒரு தகரும் புள்ளி



படம் 6.

கொண்டிருத்தால் வினைவு திசைவேகம் AL என்ற கோட்டிலும் வினக்டிபப்டும். AB , AC கோடுகளால் வினக்டிபப்டும் திசைவேகங்களின் வினைவு, AC கோட்டில் வினக்டிபப்டும். AC , CD கோடுகளால் வினக்டிபப்டும் திசைவேகங்களின் வினைவு AD என்ற கோட்டில் வினக்டிபப்டும். அதே போலக் கடைசியாக AL என்ற தேர் கோடு எவ்வாறு திசைவேகங்களின் வினைவையும் வினக்டிபப்டும்.

3-5-1. வினைத்தேற்றம்

L என்ற புள்ளி A என்ற புள்ளியுடன் வினைத்தால் புள்ளி அகலத்தில்லாமலிருக்கிறதெனக் கொள்ளலாம்.

3-6-2. சூழிப்பு

நேற்றத்தின் பயகோணத்தின் பக்கங்கள் ஒரே சமனளத்தில் அமைப்பென்பதுமென்பதிலே.

ஒரு புள்ளி ஒரே நேரத்தில் பல திசைகளிலுள்ள திசைவேகங்களைக் கொண்டிருந்தால் அந்தத் திசைவேகங்களைக் கண்டுபிடிக்க :

புள்ளியை 'O' என்று கொள்ளவும். ஒவ்வொரு திசைவேகத்தையும் O-ன் வழியாகச்செல்லும் செங்குத்தான கிண்திசைகளில் பிரிக்கவும். OX, OY என்ற கிண நேர்க்கோடுகளை எடுத்ததற்கொள்ளுவோம். $\angle XOY = 90^\circ$ எனக் கொள்க. ' v_1 ' என்ற திசைவேகம் OX என்ற நேர்க்கோட்டுடன் ' α_1 ' கோணத்தை உண்டாக்கினாலும், ' v_2 ' இப்பிரிக்கும்போது OX, OY திசைகளில் அதன் கூறுகள் முறையே $v_1 \cos \alpha_1, v_1 \sin \alpha_1$ ஆகும். அதேபோல் மற்றத் திசைவேகங்களின் கூறுகளைக் கண்டுபிடிக்கலாம். எனவே OX , திசைக்கு கிணையாக, திசைவேகங்களின் கூறுகளின் கூடுதல் $v_1 \cos \alpha_1 + v_2 \cos \alpha_2 + \dots + v_n \cos \alpha_n$ ஆகும். அதேபோல் OY , திசைக்கு கிணையாக, கூறுகளின் கூட்டுத்தொகை $v_1 \sin \alpha_1 + v_2 \sin \alpha_2 + \dots + v_n \sin \alpha_n = W$ என்றாகும். எனவே திசைவேகங்களின் வீரையு

$$= \sqrt{(v_1 \cos \alpha_1 + v_2 \cos \alpha_2 + \dots + v_n \cos \alpha_n)^2 + (v_1 \sin \alpha_1 + v_2 \sin \alpha_2 + \dots + v_n \sin \alpha_n)^2}$$

என்ற அளவைகளும். அதன் திசை OX -க்கு

$$\theta = \tan^{-1} \left[\frac{v_1 \sin \alpha_1 + v_2 \sin \alpha_2 + \dots + v_n \sin \alpha_n}{v_1 \cos \alpha_1 + v_2 \cos \alpha_2 + \dots + v_n \cos \alpha_n} \right]$$

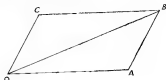
என்ற கோணத்திலுள்ளதாகவும் அமைகிறது.

ஒர் கிணைகரத் திண்மத்தின் புள்ளியின் வழியாகச்செல்லும் மூன்று விளிம்புகள் (edges) ஒரு நகரும் புள்ளியின் மூன்று திசைவேகங்களைக் குறித்தால், அந்தத் திசைவேகங்களின் விளைவு விளிம்புகள் சந்திக்கும் புள்ளியின் வழியாக வரையப்படும், கிணைகரத் திண்மத்தின் மூலம் விட்டத்தால் விளக்கலாம். கிணைத் திசைவேகங்களின் கிணைகரத் திண்மவிதி என்னாம்.

4. திசைவேகத்தின் ஊறுதல்

சூழிப்பிட்ட நேரத்தில் ஒரு புள்ளி, OA என்ற நேர்க்கோடு குறிக்கும் திசைவேகத்தில் நகரும். மற்றொரு நேரத்தில் அந்தப் புள்ளி OB நேர்க்கோடு குறிக்கும் திசைவேகத்தில் நகருவதாகக் கொள்ளுவோம். AB ஐ சேர்த்து $OABC$ கிணைகரத்தைப் பூர்த்திசெய்க. OA, OC கோடுகள் குறிக்கும் திசைவேகங்கள், OB நேர்க்கோட்டால் விளக்கப்

படும், திசைவேகத்திற்குச் சமமென்பது தெளிவு. எனவே, OA நிர்ணயிக்கும் திசைவேகத்துடன் OC குறிக்கும் திசைவேகத்தைச் சேர்த்தால்,



படம் 7

OB விக்வும் திசைவேகம் கிடைக்கும். ஆதலால் திசைவேகத்தின் மாறுதலை OC என்ற கோடு குறிக்கிறது.

குறிப்பு: கிரண்டு திசைவேகங்களின் அளவைகளிலுள்ள வீதிதிசையம் திசைவேகத்தின் மாறுதலைக் குறிக்காதென்பதைக் காண்க.

4-1. முடுக்கம் (Acceleration)

வரையறை: திசைவேகத்தின் மாறுதலின் வீதத்தை, அசையும் புள்ளியின் முடுக்கம் என்கிறோம்.

எனவே முடுக்கத்திற்கு, திசையும் அளவையும் உண்டென்பதைக் காண்க. ஆதலால் முடுக்கம் ஒரு வெக்டர் கணிப்பொருளும்.

எவ்வளவு சிதையதாக இருந்தாலும் சமநேர் கிடைவெளிகளில் திசைவேகங்களின் மாறுதல்கள் சமமாக இருந்தால் முடுக்கம் சமச்சீராக உள்ளதெனலாம். அப்போது அவரு நேரத்தில் ஏற்படும் திசைவேகத்தின் மாறுதலைக் கொண்டு முடுக்கத்தை நிர்ணயிக்கலாம்.

't' நேரத்திலுள்ள திசைவேகத்துடன் 'Δv' திசைவேகத்தைச் சேர்த்தால் 't + Δt' நேரத்திலுள்ள திசைவேகமாக ஒருமொன்றும்

சராசரி முடுக்கம் = $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ என்றாகும்.

$$'t' \text{ கிடைத்து முடுக்கம்} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

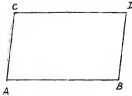
அவரு நேரத்தில், திசைவேகம் ஒர் அலகாகக்கொண்டால், அப்போது ஏற்படும் முடுக்கத்தின் அளவை, ஒரு முடுக்க அலகாகும். ஒரு முடுக்க அளவை 1 செ.மீ./(விநாடி)² என்று எழுதலாம். அதாவது

ஒவ்வொரு விநாடியிலும் விநாடிக்கு ஒரு செ.மீ. நகரும் புள்ளியின் முடுக்கத்தின் அளவைப்போ ஒர் அளவாகும்.

குறிப்பு: துகளின் நியுகேயத்தின் எதிர்திசையாக, முடுக்கம் இருந்தால், அந்த முடுக்கத்தை எதிர்ப்புருக்கம் (Retardation) என்போம்.

4-2. முடுக்கத்தின் இணைகை விதி

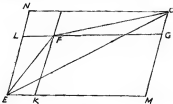
ஒர் இணைகைத்தின் மூலையிலாவழியாகச் செல்லும் திரு பக்கங்கள் ஒரு நகரும் புள்ளிக்கு ஒரே சமயத்தில் ஏற்படும் திரு முடுக்கங்களை விளக்கினால் அந்த திரு முடுக்கங்களின் விளைவு அந்த மூலையின் வழியாகச் செல்லும் மூலையிட்டம் விளக்கும் முடுக்கத்துக்குச் சமம்.



படம் 8.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள திரு முடுக்கங்களை இணைகைம் $ABCD$ -ன் பக்கங்கள் AB -ம், AC -ம் விளக்கட்டும். அதாவது அவை நேரத்தில் நகரும் புள்ளியின் திசை வேகத்துடன் சேர்த்த

திசை வேகங்களை AB , AC விளக்கட்டும்.



படம் 9.

அந்த அளவு திட்டத்தில் அவை நேரத்தின் ஆரம்பத்திலுள்ள திசைவேகத்தை EF விளக்கட்டும். பக்கங்கள் AB -க்கும், AC -க்கும் இணையாகச்செல்லு $EKFL$ என்ற இணைகைத்தைப் பூர்த்தி செய்க.

$KM = AB$ என்றும்படி EK ஐ நீட்டி. அதே போல் $LN = AC$ என்றும்படி EL ஐ நீட்டி. $EMON$ வளைந்ததையும் புத்தி செய்க.

திசைவேகம் EF , திசைவேகங்கள் EK , EL -க்குச் சமம். ஆனால் அங்கு நேரத்தில் KM , LN என்பவை, திசைவேகங்களின் மாறுதலாகக் குறிக்கிறது. எனவே அங்கு நேரத்தின் முடிவில் கூறிய திசைவேகங்கள் EM -ம் EN -ம் ஆகும். ஆகையால் அவை மீண்டும் EO -க்குச் சமம். ஆனால் EO என்பது EF , FO வினாக்கும் திசைவேகங்களுக்குச் சமம். எனவே அங்கு நேரத்தில் FO திசைவேகத்தின் மாறுதலாகக் குறிக்கிறது. அதாவது FO , புள்ளியின் விசையு முடுக்கத்தை விளக்குகிறது. மேலும் FO , AD -க்குச் சமமாகவும், வளைபாடியும் உள்ளது.

AB , AC வினாக்கும் முடுக்கங்களின் விசையு முடுக்கத்தை AD குறிக்கிறது.

5. ஓய்வும் இயக்கமும் (Rest and Motion)

எல்லா இயக்கங்களும் எதைப்போது சார்ந்தேவுகள். மனிதன் 5 கி.மீ. வேகத்தில் நடக்கிறான் என்று சொண்டால் நாம் வாறும் பூமியின் இயக்கத்தைச் சார்ந்து மனிதனின் வேகம் 5 கி.மீ. என்பது பொருள். பூமியில் நடக்கும் மனிதன், பூமி தன் அச்சைச் சுற்றிச் சுழலும்போதும் பூமி, சூரியனைச் சுற்றி வரும்போதும் அதனுடன் இயங்குகிறான். ஆதலின் மற்றவைகளைச் சார்ந்த அவனுக்கு என்று தனி இயக்கம் கிடையாது.

5.1. சார்வேகம் (Relative Velocity)

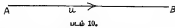
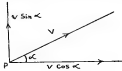
இன்றுள்ள கிரேயில் பாதைகளின்மேல், ஒரே திசையில், ஒரே திசைவேகத்துடன் இரு கிரேயில் வண்டிகள் இயங்குவதாகக் கொள்ளுவோம். ஒவ்வொரு வண்டியிலும் முறையே A , B என்ற இரு மிடர்களாகக் குறிக்க. A மிடத்தில் அமர்த்திக்கும் ஒருவர், B மிடத்திலுள்ள மற்றொருவரைப் பார்க்கும்போது, அவன் அசையாமல் இருப்பதாக எண்ணுவான். தானே ஒரு வேகத்துடன் செல்லும் வண்டியினால் அமர்த்திப்போன மற்றதுவிறுவான். A யையும், B யையும் சேர்க்கும் நேர்க்கோடு, திசையிலும் திசை அளவிலும் மாறுதல் கிடையாவிடுகிறது. எனவே A யில் பொறுத்தவரை B -க்குத் திசைவேகமே கிடையாது.

அப்படியல்லாது; முதல் கிரேயில் வண்டி 40 கி.மீ. வேகத்திலும், மற்ற வண்டி 50 கி.மீ. வேகத்திலும் செல்லுவதாகக் கொள்ளுவோம். அப்போது A யையும், B யையும் சேர்க்கும் நேர்க்கோடு மணிக்கு 10 கி.மீ. வீதம் நிற்கும். அதுவே A யில் பொறுத்து, B -ன் சார்வேகமாகும்.

மீண்டும் மீண்டும் வண்டியும் எதிர்நிலையில் முறையே 40, 50 கி.மீ. வேகத்தில் செல்லுவதாகக் கொள்ளுவோம். அப்போது AB நேர்க்கோட்டின் நீளம், A புள்ளி கியங்கும் நிலைக்கு எதிர்நிலையில் 90 கி.மீ. வேகத்தில் அதிகரிக்கும், எனவே Aஐப் பொறுத்து B-ன் சர்தவேகம் மணிக்கு 90 கி.மீ. என்று கொள்க.

உத்த வகைகளில் மீண்டாவது மீரலிலின் சர்தவேகம், தன்னுடைய நிலைவேகத்துடன், மீறதன் நிலைவேகத்தைக் கழித்துக் கிடைக்கும் நிலைவேகமேயாகும்.

A என்ற புள்ளி 'U' நிலைவேகத்துடன் AB நிலையில் நகர்டும். P புள்ளி 'V' நிலைவேகத்துடன் PQ நிலையில் நகர்டும். Aஐப் பொறுத்து P-ன் சர்தவேகத்தைக் கண்டுபிடிக்க : PQ நிலைக்கும் AB நிலைக்கும் கிடைமையுள்ள கோணம் α எனக் கொள்க.

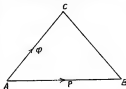


'V' நிலைவேகத்தை AB இணையாக $V \cos \alpha$ என்றும் அதற்குச் செங்குத்தாக $V \sin \alpha$ என்றும் இரு கூறுகளாகப் பிரிக்க.

AB-க்கு இணையான நிலையில் Aஐப் பொறுத்து P-ன் சர்தவேகம் $V \cos \alpha - U$ என்றாகும். AB-க்குச் செங்குத்தான நிலையில் A-க்கு வேகம் கிடைப்பது. எனவே அத்த நிலையில் P-ன் சர்தவேகம் $V \sin \alpha$ ஆகும்.

எனவே, Aஐப் பொறுத்து P-ன் சர்தவேகத்தின் கூறுகள் AB-க்கு இணையாக $V \cos \alpha - U$ என்ற நிலைவேகமும் AB-க்குச் செங்குத்தாக $V \sin \alpha$ என்ற நிலைவேகமும் ஆகும்.

கிரண்டு புள்ளிகளுக்கு கிடைசெய்யுள்ள தூரம் திசைவேகம், எனவியை அகலவு கிரண்டிலுமே மாதும்பெய்து ஒரு புள்ளிக்கு மற் றொரு புள்ளியைப் பொறுத்து திசைவேகம் உண்டாகும். அப் போது ஒரு புள்ளியின் சரீ வேகம் அதன் திசைவேகத் துடன் மத்தநன் திசைவேகத் தின் அளவையும், எதிர்திசை யும் கொண்ட திசைவேகத்தைச் சேர்த்துக் கிடைக்கும் விளைவு



படம் 11.

வேகமேயானால், \vec{AB} -ன், \vec{AC} -ன் P , Q என்ற இரு புள்ளிகளின் திசைவேகங்களைக் குறிக்கட்டும்.

மும், Q -ன் சரீத்து P -ன் சரீவேகம் $= \vec{AB} - \vec{AC}$; திசைவேகங்களின் முக்கோண விதிப்படி, $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$; எனவே P -ன் சரீவேகம் $= \vec{CB}$ அதேபோல் P -ன் சரீத்து Q -ன் சரீவேகம்

$$= \vec{AC} - \vec{AB}$$

$$= \vec{BC}$$

அகலவு திசைவேகங்களின் கிரைசை விதிப்படி கணக்கிட: P -ன் திசைவேகத்துடன் Q -ன் திசைவேகத்திற்குச் சம அளவும் எதிர் திசையுள் கொண்ட திசைவேகத்தைச் சேர்த்து கிரைசை விதிப்படி முனைவிட்டத்தைக் கணக்கிடவேண்டும்./

5.2. சரீமுடுக்கம்

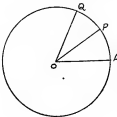
திசைவேகங்களைப்போல் முடுக்கங்களும், கிரைசை விதியையும், முக்கோண விதியையும் கடைப்பிடிப்பதால் சரீமுடுக்கத்தைச் சரீ வேக முறையின்பேரே கண்டுபிடிக்கலாம்.

6. கோணவேகம் (Angular Velocity)

ஒரு சமதளத்தில் நிலையான புள்ளியாக 'O'-வையும், நிலையான நேர்க்கோடாக OA-வையும் எடுத்துக்கொண்டால், சமதளத்தில் நகரும் புள்ளி P-ன் கோணவேகம், $\angle AOP$ கோணம் எந்த விதித்தத்தில் அதிகரிக்கிறதென்பதேயாம். கோணவேகம் சமச்சீராக இருந்தால் கோணவேகம், அவரு நேரத்தில் எவ்வளவு ஆரையளவுக்கூர் $\angle AOP$ கோணம் உண்டாக்குகிறதென்பதேயாம்.

அப்படியில்லாமலிருந்தால் ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் அதன் மதிப்பைக் கீழ்க்கண்டவாறு கணக்கிடலாம். குறிப்பிட்ட நேரத்தில் OP திரும்பும் விதத்தில் 1 விநாடி நேரம் OP திரும்பினும், OP திரும்பும் கோணத்தின் ஆரையன்களின் அளவு கோணவேகமாகும்.

கோணவேகம் என்பது, விநாடிக்கு எவ்வளவு ஆரையன்கள் கோணம் உண்டாகுகிறதென்பதைக் கொண்டு கணக்கிடலாம்.



படம் 12.

சமச்சீரான வேகத்துடன் P என்ற புள்ளி, O புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தை வரைந்தால், P -ன் கோணவேகத்தைக் கண்டுபிடிக்க.

ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் புள்ளி P -யிலும் அடுத்த விநாடி Q -யிலும் இருப்பதாக எடுத்துக் கொள்வோம். கோணவேகம் = $\angle POQ$ -விலுள்ள ஆரையன்கள். $\angle POQ$ -ல் ஆரையன்கள் என்ற அளவை $\frac{\text{வி. } PQ}{OP}$. ஒரு விநாடி

யில் வரையதாக, PQ வில்லின் தளம் = வேகம் ' V '

$$\therefore \text{கோணவேகம் '}\omega\text{' = } \frac{V}{r} \text{ ஆகும்.}$$

$$\text{எகவறு } V = r\omega$$

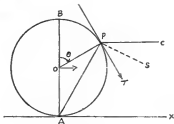
ஒரு விநாடியில் P என்ற புள்ளி ' n ' சுற்றுகளை ஏற்படுத்தினால்

$$'V' = n \times 2\pi r$$

$$\begin{aligned} \text{எனவே '}\omega\text{'} &= \frac{n \times 2\pi r}{r} \\ &= 2\pi n \end{aligned}$$

குறிப்பு: கோணவேகம், $\angle POQ$ -விலுள்ள ஆரையன்களுக்குச் சமமானவாக, கோணவேகம், OP -ன் நீளத்தைச் சார்ந்ததன்று. ஆனால் OP -யிலுள்ள புள்ளியின் நீளவேகம், அதற்கு புள்ளி O -யிலிருந்துள்ள தூரத்தைப் பொறுத்தது. எனவே புள்ளியின் வேகம் கோணவேகத்தை, O -யிலிருந்து புள்ளிக்குள்ள தூரத்தைப் பெருக்கிக் கிடைக்கும் பாலேயாகும்.

6-1 தேற்றம்



படம் 13.

ஒரு நேர்கோட்டிக்குமேல், நழுவாமல் ஒரு வட்டத்தட்டுச் சமச்சீராக உருண்டால் அந்த வட்டத்தட்டின் விளிம்பிலுள்ள புள்ளியில் திசைவேகத்தைக் கணக்கிட: வட்டத்தட்டின் மையம் 'O' எனவும் ஆரை 'r' எனவும் கொ்க. குறிப்பிட்ட நேரத்தில் தட்டின் A என்ற புள்ளியை AX என்ற நேர்கோட்டிக்கு நோடுபுள்ளியாகக் கொ்க. மையம் O 'V' திசைவேகத்தடின் AX திசையில் நகர்ட்டும். தட்டின் மையம் சீரான திசைவேகத்தில் நகரும்போது, தட்டு, மையத்தைப் பொறுத்துச் சமச்சீராகக் சுற்றுகிறது. மையப்புள்ளி, தட்டின் சுற்றளவு தூரம் நகரும்போது, தட்டின் விளிம்பிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் மையத்தைச் சாத்தி ஒரு சுற்றளவு தூரம் சுற்றுகிறது. எனவே மையத்தைச் சாத்தி ஒவ்வொரு புள்ளியில் சாத்தி வேகத்தில் அளவை = 'V' அதாவது மையத்தின் திசைவேகம். எனவே Oஐப் பொறுத்து P என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியின் கோணவேகம் = $\frac{V}{r}$ ஆகும்.

எனவே கீழ் ஒரு மாநிலியாகும். தட்டின் விளிம்பிலுள்ள உயரமான புள்ளி B என்று கொண்டால், Oஐப் பொறுத்து B-ன் சாத்திவேகம் 'V' ஆகும். அதன் திசை B-ல் தட்டின் விளிம்புக்கு வரையப்படும் நோடுகோட்டிக்கு திசையேயாகும்.

எனவே B-ன் சாத்திவேகம் கிடைத்திசையில் 'V' ஆகும். B-ன் நோடுகோட்டிக்கு திசையும் O-ன் திசையும் ஒன்றும் கீழ்ப்பதாகி,

$$B\text{-ன் திசைவேகம்} = V + V = 2V \text{ ஆகும்.}$$

A-ம் 'V' வேகத்தில் சுற்றியுளும், A-ன் தொடுகோட்டுத் திசை O-ன் திசைக்கு நேர்மாறாகும். எனவே A-ன் திசைவேகம் = $V - V = 0$ ஆகும். AB தொடி இயக்கமின்றிமை கொண்டது எனலாம்.

$\angle BOP = \theta$ என்ற கோணத்தைக் கொண்ட புள்ளியைக் கவனிக்க. Oஐச் சேர்ந்து P-ன் சார்வேகம், அதாவது PT திசையில் 'V' திசைவேகம், O-ன் சார்வேகம், அதாவது PC திசையில் 'V' திசைவேகம், ஆகிய இரண்டு திசைவேகங்களைச் சேர்த்துக் கிடைக்கும் திசைவேகமே P-யிலுடையதாகும்.

W என்பதை P-ன் விசையு திசைவேகமாகக் கொண்டால்,

$$\begin{aligned} W^2 &= V^2 + V^2 + 2V^2 \cos \theta \quad [\angle CPT = \theta \text{ எனில்}] \\ &= 2V^2 [1 + \cos \theta] \\ &= 4V^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

$$\text{எனவே } W = 2V \cos \frac{\theta}{2}$$

கூறுகள் சம அளவுகள் கொண்டிருப்பதால் 'V' திசை CPT கோணத்தின் சமவெட்டியான PS-ன் திசையாகும்.

$$\text{அங்கு சேர்த்தால் } \angle OPA = \frac{\theta}{2}$$

$$\text{மேலும் } \angle TPS = \frac{\theta}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{எனவே } \angle APS &= \angle OPT \\ &= \text{ஒரு செங்கோணம்.} \end{aligned}$$

எனவே தட்டின் விளிம்பிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் $2V \cos \frac{\theta}{2}$ வேகத்துடன் AP-க்குச் செங்குத்தான திசையில் நகருகிறது. மேலும் $AP = 2r \cos \frac{\theta}{2}$ ஆகவே Aஐப் பொறுத்து P-ன் கோணவேகம்

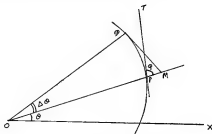
$$\begin{aligned} &\frac{2V \cos \frac{\theta}{2}}{2r \cos \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{V}{r} \\ &= \text{தட்டின் கோணவேகம்} \end{aligned}$$

அதில் பெறுவது, தட்டின் விளிம்பிலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளுடைய கோணவேகமும் ஒன்றேயாகும். எனவே அதில் சுற்றிச் செலுத்தும் மையம் எளிமையாகும்.

6.2. சுழற்சிகோண வேகம்

தேற்றம் : ஒரு வளைகோட்டின்மேல் நகரும் ஒரு துகளின் கோணவேகத்தைக் கண்டுபிடிக்க :

வளைகோட்டின்மேல் நகரும் புள்ளி 't' நேரத்தில் P-யிலும் $t + \Delta t$ நேரத்தில் Q-யிலும் இருப்பதாகக் கொள்வோம்.



படம் 14.

PT, P-ல் வளைகோட்டின் தொடுகோட்டாகக் கொள்க. $\angle XOP = \theta$. $\angle XOQ = \theta + \Delta\theta$. $\angle MPT = \phi$ எனக் கொள்க. $OP = r$, $OQ = r + \Delta r$ என்க. QM, OP-க்குச் செங்குத்தாக அமைவட்டும். P-ல் தொடுகோட்டுத் திசைவேகம் 'V' என்றால் 'Δt' நேரத்தில் P, விளிம்பின்மேல் நகரும் தூரம் $s = V \Delta t$.

Q, P-க்கு வெகு அருகில் இருப்பதால்

$$\begin{aligned} \text{நான் } PQ &= \text{விட } PQ \\ &= V \cdot \Delta t \end{aligned}$$

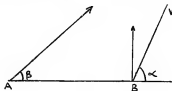
$$\begin{aligned} \text{மேலும் } \angle QPM &= \angle TPM & [P\text{-யும், Q-வும் மிக அருகில் இருப்பதால்}] \\ &= \phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore QM &= QP \cdot \sin \phi \\
 &= V \cdot \Delta t \sin \phi \\
 QM &= OQ \sin \Delta \theta \\
 &= (r + \Delta r) \sin \Delta \theta \\
 &= (r + \Delta r) \Delta \theta \quad [\because \Delta \theta \text{ மிகச் சிறியது}] \\
 (r + \Delta r) \Delta \theta &= V \cdot \Delta t \sin \phi \\
 \frac{\Delta \theta}{\Delta t} &= \frac{V}{r + \Delta r} \cdot \sin \phi
 \end{aligned}$$

எனவே, Oஐப் பொறுத்து P-ன் சார்வேகம்

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{V}{r} \sin \phi.$$

6-8. இரு நகரும் புள்ளிகளுக்கிடையே சார்வேகண வேகம்



படம் 15

$$\begin{aligned}
 A\text{ஐப் பொறுத்து } B\text{-ன் சார்வேகம்} &= \frac{V \sin \alpha}{AB} \\
 &= \frac{AB\text{-க்குச் செங்குத்துத் திசையில் } B\text{-ன் திசைவேகத்தின் கூறு}}{AB}
 \end{aligned}$$

எனவே Aஐப் பொறுத்து, B சுற்றும்பொழுது, AB-ன் திசையில் B-ன் திசைவேகத்தின் கூறு ஒரு பயனற்றும் உண்டாக்ருவ திக்கும். இப்பொழுது Aஐப் பொறுத்து, B-ன் சார்வேகண வேகத்தைக் காண A, B மிதவகளின் திசைவேகங்களின் கூறுகளை AB-க்குச் செங்குத்துத் திசையில் காண்க. அவைகள் முறையே $U \sin \beta$, $V \sin \alpha$ ஆகும். ஆகவே AB-க்குச் செங்குத்துத் திசையில் Aஐப் பொறுத்து

B-ன் சர்தவேகம் $V \sin \alpha = U \sin \beta$ எனலாம். எனவே Aஐப் பொறுத்து B-ன் சர்தகோண வேகம் $= \frac{V \sin \alpha - U \sin \beta}{AB}$

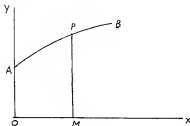
குறிப்பு: $V \sin \alpha = U \sin \beta$ என்றால் B-ன் சர்தகோண வேகம் = 0 எனவே AB தளக்கு இணையான திசையில் நகரும்.

6.4. கோண முடுக்கம்

வளையறை: கோணவேகம் அதிகரிக்கும் வீதமே கோண முடுக்கமாகும்.

வளையடம்: சில நேரங்களில் தூரம், காலம் இவைகளின் மதிப்பு கள் அல்லது திசைவேகம், காலம் இவைகளின் மதிப்புகள் கொடுக்கப் பட்டிருக்கும்போது வளையடங்கள் வரைத்து அவைகளின் மூலம் மீயக் கத்துக்குச் சம்பந்தப்பட்ட மற்ற அளவைகளை நிர்ணயிக்கலாம்.

7.1. வெளி, காலம் வளையடம் (Space-Time Graph)

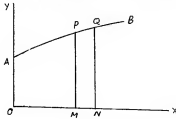


படம் 16.

OX, OY என்ற செங்குத்தான இரு அச்சுகளை எடுத்துக் கொள் வோம். OX அச்சில் காலத்தின் அளவுகளைக் குறிக்கலாம். OY அச்சில் நிலையான புள்ளியிலிருந்து அந்தக் கால அளவுக்கு ஒத்த தூரங் களைக் குறிக்கலாம். PM என்பது P-ன் நிலைத்தூரமாக எடுத்துக் கொண்டால் $OM = t$ குறிக்கும் நேரத்தில், $PM = s$, புள்ளி நகரும் தூரத் தைக் குறிக்கும்.

P -ல் வரிகோட்டின் சரிவு $\frac{ds}{dt}$ ஆகும். எனவே $\frac{ds}{dt}$, P -ன் திசை வேகத்தைக் குறிக்கும். வெவ்வேறு நேரங்களில் வரிகோட்டின் சரிவு கிடைக்கின்றனவென்றால் அந்த நேரங்களில் புள்ளிக்கு ஏற்படும் திசை வேகம்கூடுகிறது என்று சொல்லலாம்.

7.2. வேகம், காலம் வரைபடம் (Velocity-Time Graph)



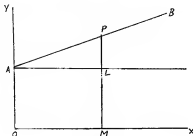
படம் 17.

அச்சுகளில், OX நேரத்தையும், OY அதன் திசைக்கு இணையாக உள்ள ஒத்த திசைவேகங்களையும் குறிப்பதாகக் கொள்ளுவோம். PM , P என்ற புள்ளியின் நிலைநிலைநிலைத் குறித்தால், OM குறிக்கும் நேரத்திலுள்ள திசைவேகம் PM இல் விளக்கும். முடுக்கு $= \frac{dv}{dt}$ என்பதால் APB , என்ற வரிகோட்டிலுள்ள புள்ளியின் சரிவு அந்தப் புள்ளியின் முடுக்கத்தைக் குறிக்கும்.

வரிகோட்டில், P -க்கு அருகில் Q என்ற புள்ளியை எடுத்து QN என்ற நிலைநிலைநிலை வரைத்தால், $MN = \Delta t$ ஆகக் கொள்ளலாம். $PMNQ$ என்பதில் பரப்பளவு $PM \cdot \Delta t$ என்பதில் மதிப்புக்குக் கிட்டத்தட்ட சமமாகும். $PM \cdot \Delta t = V \cdot \Delta t$ ஆகும். எனவே $V \cdot \Delta t$ என்பது Δt நேரத்தில் தூரம் நகரும் வெளியின் பரப்பளவைக் கொடுக்கும். ஆகவே t_1, t_2 என்ற நேரங்களுக்கிடையே தூரம் நகரும் வெளியின் பரப்பளவு

$$= \int_{t_1}^{t_2} V \cdot dt = t_1, t_2 \text{ புள்ளி } APB \text{ வரிகோட்டின் பரப்பளவாகும்.}$$

குறிப்பு: முடிக்குச் சமச்சீராக உண்டாவது, அதாவது $\frac{dv}{dt}$ ஒரு மாநிலியாகும்போது வளைகோடு, APB என்ற நேர்கோடாகும்.



படம் 18

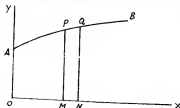
$t (= OM)$ நேரத்தில் P துணர் தகவும் வெகிவகிர் பரப்பளவு = $OMPA$ -ஈ பரப்பளவாகும்.

= PAL -ஈ பரப்பளவு + திண்டா தரம் $AOML$ -ஈ பரப்பளவு

= $\frac{1}{2}t \cdot ft + Ut$ [$OA = U$ ஂன்று கெண்டாகம்]

= $Ut + \frac{1}{2}ft^2$

7.3. முடிக்கு—நேரம் வரைபடம் (Acceleration-Time Graph)



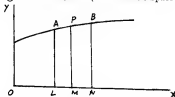
படம் 19.

OX நேரத்தையும், OY திசைக்கு இணையாகவுள்ள முடுக்கின் நேரத்துக்கு ஒத்த மதிப்பையும் குறிப்பதாகக் கொண்டால், APB வளைவோடு ஒரு முடுக்கு - நேரம் வளைகொடாகும். $OM = t$ என்றால் PM அந்த நேரத்திற்குரிய முடுக்கின் அளவைக் குறிக்கும். வளை கோட்டில் P -க்கு மிகச் சமீபமாக, Q ஐ எடுத்துக்கொண்டு அதன் நிலை தூரம் QN ஐ வரைந்தால், $MN = \Delta t$ ஆகும். $PMNQ$ -க்குப் பரப்பளவு, $f \cdot \Delta t$ -யின் மதிப்புக்குக் கிட்டத்தட்ட சமமாகும்.

$f \cdot \Delta t$, ' Δt ' நேரத்தில் திசைவேகத்தில் ஏற்படும் மாறுதலைக் குறிக்கும்.

எனவே ' t_1 ', ' t_2 ' நேரங்களுக்குத் திசைவேகத்தில் ஏற்படும் மாறுதல் $\int_{t_1}^{t_2} f \cdot dt$ ஆகும்.

7-4. முடுக்கு - வெளி - வரைபடம் (Acceleration-Space Graph)



படம் 20.

OX தூரம் தரும் தூரத்தையும், OY அந்த நேரத்தில், OY -க்கு இணையாக உள்ள முடுக்கின் அளவையும் குறிப்பதாகக் கொள்வோம். தூரத்தை OM -ஆம் குறிக்கும்போது, அந்த நேரத்தில் ஏற்படும் முடுக்கின் அளவு PM -ஆம் குறிக்கப்படும்.

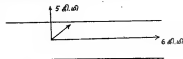
$$\begin{aligned} \int_{OL}^{OM} f ds &= \int_{VA}^{VB} v \frac{dv}{ds} ds \\ &= \int_{VA}^{VB} v dv \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{3}{5} V^2 \right]_{VA}^{VB}$$

எனவே $\frac{3}{5} V^2$ -ம் ஏற்படும் மாறுதலின் அளவை AL , BM என்ற நிலை தூரங்களுக்கிடையேயுள்ள APB வளைகோட்டின் பரப்பளவு குறிக்கும்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

1. மணிக்கு 6 கி.மீ. வேகத்தில் ஓடிக்கொண்டிருக்கும் ஆற்றின் நேர் குறுக்கே மணிக்கு 5 கி.மீ. வேகத்தில் ஒரு படகைக் கடிக் கிழக்கே, படகின் விசையு திசைவேகத்தைக் கண்டுபிடி. ஆற்றின் அகலம் 200 மீ. என்றால் படகு எவ்வளவு தூரம் தள்ளி ஆற்றின் அக் கரையை அடையும்.



படம் 20A

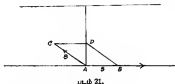
கூற்று திசைவேகங்கள் 5 கி.மீ., 6 கி.மீ. அவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான திசையிலுள்ளன. விசையு திசைவேகத்தின் அளவு $= \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61}$ கி.மீ./மணி. இந்தத் திசைவேகம் கரைப்புடன் 'α' கோணத்தை உண்டாக்கினால் $\tan \alpha = \frac{5}{6}$ அல்லது $\alpha = \tan^{-1} \frac{5}{6}$

$$\text{படகு ஆற்றைக் கடக்கும் நேரம்} = \frac{200}{50.86} \text{ மணி}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{அத்தேரத்தில் படகு ஆற்றின் வேகத்தில், தள்ளி} \\ \text{குடன் கிழக்குச் செல்லப்படும் தூரம்} \end{array} \right\} = \frac{120}{56} \times 2 = 240 \text{ மீ.}$$

2. 300 மீ. அகலமுள்ள ஓர் ஓட்டையில் தண்ணீர் மணிக்கு 5 கி.மீ. வேகத்தில் ஓடிக்கொண்டிருக்கிறது. ஒரு படகை மணிக்கு 8 கி.மீ. வேகத்தில் அந்த ஓட்டையில் செலுத்தமுடியும். படகு நேர்க்குறுக்காக ஆற்றைக் கடக்கவேண்டுமானால், எந்தத் திசையில் படகைச் செலுத்த வேண்டும்? ஆற்றைக் கடக்க எவ்வளவு நேரமாகும்?

AB , AC , AD ஆற்றின் திசைவேகம், படகின் திசைவேகம், விசையு வேகங்களைக் குறிக்கட்டும். AD கரைக்குச் செங்குத்தாக இருக்கவேண்டும்.



$$AD = \sqrt{64-25} = \sqrt{39}$$

$$\cos DAC = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

எனவே படகு AD-யுடன் $\cos^{-1} \frac{\sqrt{39}}{8}$ கோணம் உண்டாகும் வகையில் செலுத்தப்படவேண்டும்.

$$\left. \begin{array}{l} \text{ஆற்றைக் கடக்க எடுத்துக்} \\ \text{கொள்ளும் நேரம்} \end{array} \right\} = \frac{388}{\sqrt{39 \cdot 1098}} \text{ மணி}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{39 \cdot 18}} \times 60 \times 60 \text{ விநாடிகள்}$$

$$= \frac{1080}{\sqrt{39}} \text{ விநாடிகள்}$$

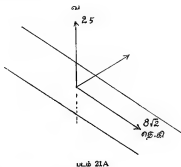
$$= 173.08 \text{ விநாடிகள்}$$

3. தென்கிழக்குத் திசையில் ஓடும் ஆற்றின் வேகம் மணிக்கு $8\sqrt{2}$ கி.மீ. அதில் தேர்வடக்குத் திசையில் ஒரு விசைப்படகு மணிக்கு 25 கி.மீ. வேகத்தில் கிழக்கேப்படுகிறது. ஒரு மணிநேரம் எழித்தல் படகு கிழக்குமிடத்தைக் காண்பிடி.

படகுக்கு வடக்குத் திசையில் மணிக்கு 25 கி.மீ. திசைவேகமும் தென்கிழக்குத் திசையில் மணிக்கு $8\sqrt{2}$ கி.மீ. திசைவேகமும் உள்வன. தென்கிழக்குத் திசையிலுள்ள படகின் கூற்று திசைவேகத்தை $8\sqrt{2}$ லை 45° கி.மீ./மணி கிழக்காகவும் $8\sqrt{2}$ லை 45° கி.மீ./மணி தெற்காகவும் கொள்ளலாம். எனவே படகின் மொத்தக் கூற்று திசைவேகங்கள்

வடக்குத் திசையில் 17 கி.மீ./மணி

கிழக்குத் திசையில் 8 கி.மீ./மணி

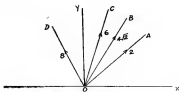


ஆகவே வினாவு் திசைவேகம்.

$$\begin{aligned}\sqrt{17^2 + 8^2} &= \sqrt{289 + 64} \\ &= \sqrt{353} \text{ கி.மீ.பெர்ணி}\end{aligned}$$

திசை = வடக்குக்கு $\tan^{-1} \frac{8}{17}$ கோணம் உண்டாகும் திசை.

4. குறிப்பிட்ட திசைவுடைய $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ கோணங்கள் உண்டாகும் திசைவேகங்கள் முறையே 2, $4\sqrt{2}$, 6, 8, என்பவைகளை ஒரு புள்ளி ஒரே நேரத்தில் கொண்டிருக்கிறது. அதன் திசை வேகத்தைக் காண்போம்.



படம் 22.

குறிப்பிட்ட திசையை OX எனவும் அதற்கு நேர் எதிரான திசையை OY எனவும் கொள்க. OX திசையில் திசைவேகங்களின் கூடுதல் $2 \cos 30^\circ$, $4 \sqrt{2} \cos 45^\circ$, $6 \cos 60^\circ$, $8 \cos 120^\circ$

அதாவது $\sqrt{3}$, 4 , 3 , -4

எனவே அவைகளின் கூட்டுத்தொகை $= 3 + \sqrt{3}$

OY திசையில் வேகங்களின் கூடுதல்,

$2 \sin 30^\circ$, $4 \sqrt{2} \sin 45^\circ$, $6 \sin 60^\circ$, $8 \sin 120^\circ$

அதாவது 1 , 4 , $3\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$

எனவே அவைகளின் கூட்டுத்தொகை $= 5 + 7\sqrt{3}$

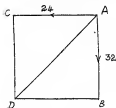
விசையு திசைவேகம் ' V ' எனலாம்

$$\begin{aligned} V^2 &= (3 + \sqrt{3})^2 + (5 + 7\sqrt{3})^2 \\ &= [9 + 6\sqrt{3} + 3 + 25 + 70\sqrt{3} + 147] \\ &= [184 + 76\sqrt{3}] \\ &= 184 + 131.632 \\ &= 315.632 \\ V &= 17.76 \end{aligned}$$

OX உடன் ' V ' ஏற்படுத்தும் கோணம் ' θ ' எனலாம்

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{5 + 7\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \\ &= \frac{17.124}{4.732} \\ &= 3.618 \end{aligned}$$

எனவே $\theta = 74\frac{1}{2}^\circ$ (தோராயமாக)



படம் 23.

5. மணிக்கு 24 கி.மீ. வேகத்தில் ஒரு கப்பல் நேர் கிழக்காகச் சென்றுகொண்டிருக்கிறது. அதே நேரத்தில் மற்றொரு கப்பல் நேர் தெற்காக மணிக்கு 32 கி.மீ. வேகத்தில் செல்கிறது. முதல் கப்பலில் பொதுத்து, நிரண்டாவது கப்பலின் சார்வேகத்தைக் காணுவிடி.

AB நிரண்டாவது கப்பலின் வேகத்தைக் குறிக்கிறதெனக் கொள்க. அதனுடன் முதல் கப்பல் செல்கும் திசைக்கு எதிர்திசை

யில், அதாவது நேர் மேற்கே திசைவேகம் 24 கி.மீ./மணி-ஐ AC -ஐக் குறிக்க. சார்வேகம், கிணைரத்தின் மூலவிட்டம் AD

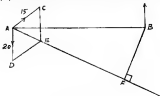
$$AD = \sqrt{32^2 + 24^2}$$

$$= 40.$$

எனவே சார்வேகத்தின் அளவு
= 40 கி.மீ./மணி

அதன் திசை, மேற்குக்குத் தெற்குத் திசையில் $\tan^{-1} \frac{3}{4}$ கோண மூண்டாகவேண்டும்.

6. 15 நாவிகன் (Knots) வேகத்தில் செல்லும் ஒரு போர்ட் கப்பல் எதிரி சண்டைக் கப்பலை, 8 நாவிக் மைல் தூரத்தில் தனக்கு நேர் கிழக்கே காண்கிறது. எதிரி கப்பல் 20 நாவிகன் வேகத்தில் நேர் வடக்கே சென்றுகொண்டிருக்கிறது. எதிரி கப்பலுக்கு அதி சமீபமாகச் செல்ல எந்தத் திசையில் போர்ட்கப்பல் நகரவேண்டும்?



படம் 24.

முதல் திசையில் போர்ட் கப்பலையும் சண்டைக் கப்பலையும் A, B என்ற புள்ளிகளாகக் குறிப்போம். B அசையாதிருக்கிறதென்று கொண்டால், A -க்கு நேர் தென்திசையில் 20 நாவிகன் வேகத்தைக் குறிக்கவேண்டும். A -க்கு உண்டான 15 நாவிகன் வேகத்தை AC -ஐக் குறிக்கவும். எனவே, AE இவைகளின் விளைவு திசைவேகத்தைக் குறிக்கும் AE, AB -உடன் உண்டாகும் கோணம் எவ்வளவு சிறியதாக இருக்கிறதோ, அதைப்போலத்து B, A -க்குச் சமீபமாக வருமென்றால்,

$\angle EAB$ குறைவாக இருக்க $\angle EAD$ ிக் அதிகமாக இருக்க வேண்டும். எனவே $\angle EAD = 90^\circ$ ஆகும்.

$$\cos \angle EAB = \sin \angle EAD = \frac{15}{20}$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$\sin \angle BAC = \cos \angle EAB = \frac{3}{4}$$

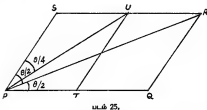
போர்ட்கப்பல் கிழக்கு வடக்காக $\sin^{-1} \frac{3}{4}$ கோணமூண்டாகும் வகையில்

நகரவேண்டும். A -க்கும், B -க்கும் கிடைவேயுள்ள குறுகிய தூரம் BF .
அது AF -க்குச் செங்குத்தாக இருக்கவேண்டும்.

$$\begin{aligned} AF &= AB \cdot \cos \angle EAB \\ &= 8 \times \frac{3}{4} \\ &= 6 \end{aligned}$$

B யில் பொதுத்து, A 6 எம்க்கள் சென்றிருக்கிறது.

7. சம அளவுகளும், வெறிவேறு திசைகளும் உடைய திசை வேகங்களை ஒரே சமயத்தில் ஒரு துகள் கொண்டிருக்கிறது. ஒரு திசை வேகத்தின் அளவைப் பாதிப்பாகக் குறைத்திருக்கிறது. விளைவு வேகம் மற்றத் திசைவேகத்தின் திசையுடன் உண்டாகும் கோணத்தையும் பாதிப்பாகக் குறைத்திருக்கிறது. கிரைஸ் திசைவேகங்களுக்கிடையேயுள்ள கோணத்தைக் காண்பிவு.



கொடுக்கப்பட்டுள்ள இது திசைவேகங்களையும் PQ , PS என்ற கோடுகளாக விளக்கலாம்.

$$PQ = PS$$

எனவே $PQRS$ இணைகோத்தின் மூலக்கூறு PR விளைவு வேகத்தைக் குறிக்கும். மேலும்

$$\angle QPR = \angle RPS = \frac{\theta}{2} \quad [\angle QPS = \theta \text{ என எடுத்துக் கொள்}]$$

பிறகு முதல் திசைவேகத்தின் அளவைப் பாதிப்பாகக் குறைக்கப்படுகிறது. குறைக்கப்பட்ட திசைவேகத்தை PT என்ற நேர்க்கோடு குறிக்கவும். எனவே $PTUS$ இணைகோத்தின் மூலக்கூறு PU , இப்போதுள்ள திசைவேகங்களின் விளைவு வேகத்தைக் குறிக்கும்.

$$\begin{aligned} LSPU &= \frac{1}{2} LSPR \\ &= \frac{\theta}{4} \end{aligned}$$

மேலும் SR-ன் நடுப்புள்ளி 'U' ஆகும்.

LSRP-ன் சமவெட்டியாக PU உள்ளது.

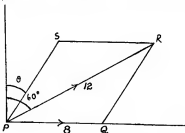
$$\begin{aligned} \text{எனவே } \frac{PR}{PS} &= \frac{RU}{US} \\ &= 1 \\ \therefore PR &= PS \\ &= PQ \\ &= QR \end{aligned}$$

$\therefore PQR$ ஒரு சமபக்க முக்கோணமாகும்

$$\text{ஆகவே } \frac{\theta}{2} = 60^\circ$$

$$\therefore \theta = 120^\circ$$

8. மணிக்கு 8 கி.மீ. வேகத்தில் சமதளத்தில் நடக்கும் ஒரு மனிதன், பெய்வும் மழை விவரம் மூலத்தின்மேல், மணிக்கு 12 கி.மீ. வேகத்தில் நிகழ்கிறதுக்குரிய திசையில்லுந்து 60° கோணத்தில் விழுவதாக எண்ணுகிறான். மழையின் உண்மையான திசைவேகத்தைக் கண்டுபிடி.



படம் 26.

மழையின் உண்மையான திசைவேகம் 'V' என்று கொள்ளுவோம். அதை PS என்ற கோடு குறிக்கப்படும். மனிதன் நடக்கும்

திசைக்கு எதிர்த்திசையில் வரையப்படும் திசைவேகம் 8 கி.மீ./மணிக்கு PQ குறிக்கப்படும். $PQRS$ கிணைகரத்தைப் புத்திசெய்தாக, மூலம் விட்டம் PR நிறைவகனின் விசைவேகத்தைக் குறிக்கும். $\angle RPT = 60^\circ$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\angle RPQ = 30^\circ = \angle PRS$$

$$\text{எனவே } \frac{PS}{\sin \angle PRS} = \frac{SR}{\sin \angle RPS} = \frac{RP}{\sin \angle PSR}$$

$$\frac{PS}{\sin 30^\circ} = \frac{SR}{\sin (60^\circ - \theta)} = \frac{RP}{\sin (90^\circ + \theta)}$$

$$\frac{V}{\sin 30^\circ} = \frac{8}{\sin (60^\circ - \theta)} = \frac{12}{\cos \theta}$$

$$\therefore 8 \cos \theta = 12 [\sin 60^\circ \cos \theta - \cos 60^\circ \sin \theta]$$

$$= 6 [\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta]$$

$$6 \sin \theta = [6\sqrt{3} - 8] \cos \theta$$

$$\tan \theta = \frac{3\sqrt{3} - 4}{3}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left[\frac{3\sqrt{3} - 4}{3} \right]$$

$$V = \frac{12 \sin 30^\circ}{\cos \theta}$$

$$= 12 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos \theta}$$

$$= 6 \sec \theta$$

9. ஒரு மோட்டார் வண்டி மணிக்கு 60 கி.மீ. வேகத்தில் சென்று கொண்டிருக்கிறது. அதன் சக்கரங்களின் விட்டம் 2 மீ. உள்ளது. ஏதாவதொரு சக்கரத்தில் பூமிக்கு $1\frac{1}{2}$ மீ. உயரத்திலுள்ள கிரு புள்ளிகளின் திசைவேகங்களைக் கண்டுபிடி.

வட்டத்தின் மையப்புள்ளியை C என்றும், பூமியைச் சக்கரம் தொட்டுக்கொண்டிருக்கும் புள்ளியை A என்றும், சக்கரத்தின் மிக உயரத்திலுள்ள புள்ளியை B என்றும் குறிக்க.

$$CD = \frac{1}{2} \text{ மீ.}$$

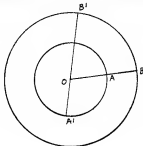
$$CP = 1 \text{ மீ.}$$

$$\cos \angle DCP = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \angle DCP = 60^\circ$$

$$\text{எனவே } \angle RPT = 60^\circ$$

வட்டங்களின் ஆரங்கள் 2 செ.மீ., 3 செ.மீ. என்பதால் A-க்கும், B-க்கும் உள்ள தூரம் 1 செ.மீ. ஆக இருக்கும்போது A-யும், B-யும் 'O' பொது விட்டத்தின் ஒரே பக்கத்தில் இருக்கவேண்டும். தூரம்



படம் 28.

5 செ.மீ. ஆகும்போது பொது விட்டத்தில் கமையுள்ள 'O'-ன் வெவ்வேறு பக்கங்களில் இருக்கவேண்டும். B-ன் திசைவேகம் A-ன் திசைவேகத்தைவிட அதிகமாகவால் B, Aஐ விட 180° அதிகமாகச் சுற்றியாவேண்டும்.

$$\begin{aligned} A\text{-ன் கோணவேகம்} &= \frac{2}{3} \\ &= 1 \text{ ஆரையன்/விநாடி} \\ B\text{-ன் கோணவேகம்} &= \frac{3}{3} \text{ ஆரையன்/விநாடி} \\ &= 3 \text{ ஆரையன்கள்/விநாடி} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\text{-யும் } B\text{-யும் 'O'ஐச் சுற்றி வருவதால் Aஐப் பொறுத்து } B\text{-யின்} \\ \text{சுழிவேக வேகம்} &= 2 \text{ ஆரையன்கள்/விநாடி} \end{aligned}$$

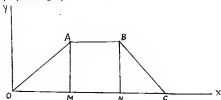
எனவே α ஆரையன்கள் அதிகமாகச் சுற்ற

$$= \frac{\pi}{2} \text{ விநாடிகள்}$$

$$= 1.578 \text{ விநாடிகள் ஆகும்.}$$

11. ஒரு கிரயிஸ் வண்டியின் வேகம் α என்ற மாறிலி வீதத்தில் 'O'-ஐவிடத்து 'V'-க்கு அதிகரிக்கிறது. பிறகு மொஞ்ச நேரம் வேகம் மாறாமல் இருக்கிறது. கடைசியாக β என்ற மாறிலி வீதத்தில் 'O'-க்குக் குறைகிறது. கிரயிஸ் வண்டி சென்ற மொத்தத் தூரத்தை 'L' என்று

கொண்டால், அதைத் தூரத்தைக் கடக்க வண்டி எடுத்துக்கொண்ட நேரத்தைக் கண்டுபிடி.



படம் 29.

$OABC$ திசையெகம்—நேரம் வரையடத்தை விளக்குவதாகக் கொள்வோம். OA மாதிரி முடுக்கத்துடன் நிரலில் வண்டி நகரும் இயக்கத்தையும் குறிப்பதாகக் கொள்ளுவோம். மாதிரி திசையெகத்துடன் வண்டி நகரும் இயக்கத்தை AB -யும், மாதிரி எதிர்முடுக்கத்துடன் செல்லும் இயக்கத்தை BC -யும் குறிப்பதாகக் கொள்ளுவோம்.

AM, BN என்ற திசைத்தூரங்களை வரைக.

$$AM = BN = V$$

$$\alpha = \text{மாதிரி முடுக்கு}$$

$$= OA\text{-ன் சரிவு}$$

$$= \tan \angle MOA$$

$$= \frac{MA}{OM}$$

$$= \frac{V}{OM}$$

$$= \frac{V}{OM}$$

$$\text{எனவே } OM = \frac{V}{\alpha}$$

$$\beta = \text{மாதிரி எதிர்முடுக்கு}$$

$$= \tan \angle NCB$$

$$= \frac{NB}{NC}$$

$$= \frac{V}{NC}$$

$$= \frac{V}{NC}$$

$$\therefore NC = \frac{V}{\beta}$$

$$\begin{aligned}
 l &= \text{கிரயிக் வண்டி சென்ற மொத்தத் தூரம்} \\
 &= OABC \text{ என்ற எரிவளித்தின் பரப்பளவு} \\
 &= \frac{1}{2}(OC + AB) \cdot AM \\
 &= \frac{1}{2}(OM + MN + NC + AB) \cdot AM \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{V}{\alpha} + 2AB + \frac{V}{\beta} \right] \cdot V \\
 \frac{2l}{V} - \frac{V}{\alpha} - \frac{V}{\beta} &= 2AB.
 \end{aligned}$$

ஆகவே வண்டி எடுத்துக்கொண்ட மொத்த

$$\begin{aligned}
 \text{தூரம்} &= OC \\
 &= OM + MN + NC \\
 &= \frac{V}{\alpha} + \frac{1}{2} \left[\frac{2l}{V} - \frac{V}{\alpha} - \frac{V}{\beta} \right] + \frac{V}{\beta} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{2l}{V} + \frac{V}{\alpha} + \frac{V}{\beta} \right] \\
 &= \frac{l}{V} + \frac{V}{2} \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right]
 \end{aligned}$$

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. ஒரு மணிதன் நேர் கிழக்காக 3 மீ. தூரம் சென்று பிறகு நேர் தெற்காக 4 கி.மீ. தூரம் நடக்கிறது. அவனுடைய இடப்பெயர்ச்சியைக் கண்டுபிடி.

2. நேர் தெற்காக, ஒரு கப்பல் $\sqrt{2}$ கி.மீ. தூரம் நகருகிறது. பிறகு தென்மேற்குத் திசையில் 3 கி.மீ. தூரம் செல்கிறது. தெற்கி விழுந்து மேற்காக $\tan^{-1} \frac{1}{2}$ திசையில், 17 கி.மீ. இடப்பெயர்ச்சி உண்டாகிற தென்பதை நிரூபி.

3. ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்துத் திசையிலுள்ள இரு திசை வேகங்கள் 12 செ.மீ./விநாடி, 5 செ.மீ./விநாடி என்றிருந்தால், அதன் விளைவு வேகத்தைக் கண்டுபிடி.

4. 40 செ.மீ./விநாடி, 30 செ.மீ./விநாடி அவுடின் இரு திசை வேகங்களின் திசைவெக்டரிடையேயுள்ள கோணம் 30° என்றும் விளைவு வேகத்தைக் கண்டுபிடி.

5. 25 கி.மீ./மணி வேகங்களுள்ள இரு திசைவேகங்களுக்கிடையேயுள்ள கோணம் 60° என்றும் விளைவு வேகத்தைக் கண்டுபிடி.

திரைவேகமும் மூடுகிறதும்

6. 'U', 'V' திரைவேகங்களின் விளைவு வேகம் 'W' என்றால், 'W' திரைவேகம் மீட்டடிக்கும்போது, விளைவு வேகம், 'V' திரைவேகத்துக்குச் செங்குத்தாக உள்ளதென்று திருபி.

7. ஒரு புள்ளி கொண்டிருக்கும் திரைவேகங்களை ஒரு வட்டத்தில் மேலுள்ள புள்ளியையும் ஏதாவதொரு விட்டத்தில் துளிரெய்யும் சேர்க்கும் நேர்வோடுகள் விளக்கினால் அவைகளின் விளைவு வேகம் வட்டத்தில் மேலுள்ள புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் விட்டம் குறிக்கிற தென்பதைக் காண்பி.

8. 5 கி.மீ./மணி திரைவேகத்தில் வடகிழக்குத் திசையில் ஒரு மணிதன் நடக்கிறது. நேர் வடக்கு நேர் கிழக்குத் திசைகளில் அவன் திரைவேகத்தின் கூறுகளைக் காண்பி.

9. 15 செ.மீ./விநாடி திரைவேகத்தில் ஒரு புள்ளி ஒரு நேர் கோட்டில் நகர்கிறது. அந்தக் கோட்டிற்கு 30° கோணத்திலுள்ள திரையின், திரைவேகத்தின் கூற்றைக் காண்பி.

10. 150 செ.மீ./விநாடி உள்ள திரைவேகத்தை, நிரண்டிற்கும் கிடைமே 60° கோணமுள்ள இரு சம திரைவேகங்களாகப் பிரிக்கவும்.

11. ஒரு புள்ளி 4, 3, 2, 1 அளவுள்ள திரைவேகங்களை ஒரே சமயத்தில் கொண்டிருக்கிறது. ஒன்றுக்கும் நிரண்டிற்கும் கிடைமேயுள்ள கோணம் 30°, நிரண்டிற்கும் மூன்றிற்கும் கிடைமேயுள்ள கோணம் 120° என்றால் அவைகளின் விளைவு வேகத்தைக் காண்பி.

12. விநாடிக்கு 12, 15, 22 செ.மீ. வேகங்களை ஒரே சமயத்தில் கொண்ட ஒரு புள்ளி அசையாமலிருக்கிறது. 12, 15 செ.மீ. திரைவேகங்களின் திரைக்கிடைமேயுள்ள கோணத்தைக் காண்பி.

13. 300 மீ. அகலமுள்ள ஓர் ஆற்றில் தண்ணீர் மணிக்கு 3 கி.மீ. வேகத்தில் ஓடுகிறது. மணிக்கு 8 கி.மீ. வேகத்தில், ஒரு படகு ஆற்றின் நேர் குறுக்கே செலுத்தப்படுகிறது; எதிர்க் கரையை அடைவதும்போது படகு எவ்வளவு தூரம் ஆற்றில் சென்றிருக்கும்?

14. நீரோடையில் ஒட்டமில்லாமலிருந்தால் 300 மீ. அகலமுள்ள ஓடைவை 5 நிமிடங்களில் ஒரு மணிதன் நீந்திக் கடப்பான். ஒட்டமிருக்கும்போது கடப்பதற்கு 6 நிமிடங்கள் பிடிக்கும். ஓடைவின் நீரின் வேகம் என்ன?

15. ஒரு புள்ளிக்கு இருதிசைகளில் சம திரைவேகங்கள் உள்ளன. ஒரு திரைவேகத்தின் அளவை பாதியாகக் குறைக்கப்படுகிறது. விளைவு வேகம் மற்றத் திரைவேகத்துடன் உண்டாகும் கோணம் பாதியாகப் படுகிறது. நிரண்டு திரைவேகங்களுக்கும் கிடைமேயுள்ள கோணம் 120° எனக் காண்பி.

16. மணிக்கு 12 கி.மீ. வேகத்தில் மிதிவண்டி ஹிடும் ஒரு ஸ்பான் எந்தத் திசையில் விநாடிக்கு 8 மீட்டர் வேகத்தில் ஒரு கார் எதிர்த்தால், விநாடி விவகம் மிதிவண்டி ஓடும் திசைக்குச் செங்குத்தாக இருக்கும்.

17. மணிக்கு 15 கி.மீ. வேகத்தில் ஒரு ஸ்பான் நேர் கிழக்குத் திசையில் செலுகிறது. அதே நேரத்தில் மற்ருரு ஸ்பான் மணிக்கு 20 கி.மீ. வேகத்தில் நேர் வடக்குத் திசையில் செலுகிறது. முதல் ஸ்பான் சாத்தி மிரண்டாவது ஸ்பானின் சார்க்கெத்தைக் கண்டுபிடி.

18. மணிக்கு 40, 50 கி.மீ. வேகங்களில் இரு மிரலில் வண்டிகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மிரலில் பாதையின்மேல் ஓடுகின்றன. மிரண்டாவது வண்டியைப் பொறுத்து முதல் வண்டியின் சார்க்கெம் என்ன?

19. ஒரு குறித வண்டியில் என்னல் பக்கம் உட்காத்திருக்கும் ஒரு பிரபானி, காத்து வண்டிக்கு நேர் எதிராக 16 கி.மீ./மணி வேகத்தில் அடிப்பதாக எண்ணுகிறான். குறித வண்டி 24 கி.மீ./மணி வேகத்தில் அப்போது சென்றுகொண்டிருந்தால் காத்தின் உண்மையான திசை வேகத்தைக் கண்டுபிடி.

20. நேர் மேற்காகச் செல்லும் ஒரு பாதையில் மணிக்கு 5 கி.மீ. வேகத்தில் நடக்கும் ஒரு மனிதன், காத்து தெற்குத் திசையிலிருந்து வீகவதாக எண்ணுகிறான். அதே பாதையில் அதே திசையில் 10 கி.மீ./மணி வேகத்தில் மிதிவண்டி ஹிடும் மற்ருரு மனிதன் காத்துத் தென்மேற்கு திசையிலிருந்து வீகவதாக எண்ணுகிறான். அப்படி யானால் காத்தின் உண்மையான திசைவேகம் என்ன?

21. P என்ற மிடத்தில் இரு சாலைகள் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாகச் சந்திக்கின்றன. ஒரு சாலையில் மணிக்கு 3 கி.மீ. வேகத்தில் நடக்கும் ஒரு மனிதன் A, P-யிலிருந்து 100 கி.மீ. தூர மிருக்கும்போது மற்ருரு சாலையில் மணிக்கு 4 கி.மீ. வேகத்தில் நடக்கும் மற்ருரு மனிதன் B-ஐப் பார்க்கிறான். B-ஐச் சாத்தி, A-ன் சார்க்கெம் என்ன? A நின்று எவ்வளவு தூரம் நடந்தால் B-க்கு வெகு சமீபத்திலிருப்பான்?

22. 60° கோணத்தில் இரு சாலைகள் A என்ற மிடத்தில் சந்திக்கின்றன. அந்த இரு சாலைகளிலும் முறையே 20 கி.மீ. 30 கி.மீ. வேகத்தில் செல்லும் மோட்டார் வண்டிகள் A-ஐ நோக்கிச் சென்று கொண்டிருக்கின்றன. இரு வண்டிகளும் A-யிலிருந்து முறையே 350, 200 மீட்டர் தூரத்திலுள்ளபோது அவைகளின் சார்க்கெத்தைக் கண்டுபிடி. அவை வெகு சமீபத்திலிருக்கும்போது A-யிலிருந்து அவைகளின் தூரங்களைக் கண்டுபிடி.

23. வடகிழக்குத் திசையில் பிரபலமான செய்யும் ஒரு மனிதன், ஊற்று நேர் வடக்குத் திசையிலிருந்து அடிப்பதாக எண்ணுகிறான். வேகத்தை கிரட்டிக்கும்போது ஊற்று வடக்குக்கு 10^{-12} மீ/செ. வேகத்தில் கிழக்குத் திசையிலிருந்து அடிப்பதாக அவனுக்குத் தெரிகிறது. ஊற்று அடிக்கும் உண்மையான திசை நேர் கிழக்கு நோக்கி எனக் காண்பி.

24. மணிக்கு 10 கி.மீ. வேகத்தில் நேர் கிழக்குத் திசையில் மிதிவண்டி வீறும் ஒரு மனிதன் ஊற்று வடகிழக்குத் திசையிலிருந்து அடிப்பதாக எண்ணுகிறான். அவனே வடகிழக்குத் திசையில் செல்லும் போது, ஊற்று நேர் வடக்குத் திசையிலிருந்து வருவதாகத் தெரிகிறது. ஊற்றின் உண்மையான திசைவேகத்தைக் காண்பி.

25. ஒளியைச் சார்ந்து மற்றதன் சார்வேகத்தைக் கொண்டு கிடைசையும் புள்ளிகளுக்கிடையேயுள்ள வெகு குறுகிய தூரத்தை எப்படிக் காண்பிப்பதென விளக்கு.

26. ஒரு குதிப்பிட்ட நேரத்தில் ஒரு எப்பக் மற்றொரு எப்பலிலிருந்து நேர் மேற்குத் திசையில் 20 கி.மீ. தூரத்திலுள்ளது. முதல் எப்பல் மணிக்கு 20 கி.மீ. வேகத்தில் வடகிழக்குத் திசையில் நகருகிறது. மற்றது மணிக்கு 16 கி.மீ. வேகத்தில் கிழக்குத் திசையில் நகருகிறது. அவைகளிடையேயுள்ள குறைந்த தூரத்தைக் காண்பி.

27. நேர் வடக்குத் திசையில் 'a' கி.மீ. தூரத்தில் 'B' எப்பல், A எப்பலிலுள்ள ஒருவர் பார்க்கிறான். 'V' கி.மீ./மணி வேகத்தில் நேர் மேற்குத் திசையில் 'B' எப்பல் நகருகிறது. கிழக்குக்கு 30° வடக்குத் திசையில் A எப்பல் '2V' கி.மீ./மணி வேகத்தில் நகருகிறது. B எப்பல் பார்த்த நேரத்திலிருந்து $\frac{2a}{V}$ மணி நேரம் கழித்து, A-யும், B-யும் வெகு சமீபமாக இருக்குமென திருபி.

28. ஒரு நேர் சாலை மீட்டர் மணிக்கு 15 கி.மீ. வேகத்தில் ஒரு மோட்டார் வண்டி ஒதுக்கொண்டிருக்கிறது. அதன் சாலைக்குச் செங்குத்தாக உடன் மற்றொரு சாலையில் மணிக்கு 6 கி.மீ. வேகத்தில் ஒரு மனிதன் கிழக்கு சாலைக்குச் செங்குத்தாக நிற்கிறார். அவர் மோட்டார் வண்டியைப் பார்க்கும்போது வண்டி சத்தியெழுத்து 200 மீ. தூரத்திலும், மனிதன் 100 மீ. தூரத்திலும் இருக்கிறான். மனிதன் தன் வேகத்தை எவ்வளவு அதிகரித்தால் சத்தியெழுத்து மோட்டார் வண்டியைப் பிடிக்க முடியும்?

29. ஒரு கிரயில் வண்டி மணிக்கு 45 கி.மீ. வேகத்தில் சென்று கொண்டிருக்கிறது. அதன் சக்கரத்தின் விட்டம் 1 மீ. ஆகும். சக்கரம்

நழுவயிர்²⁰ என்று கொண்டு அதன் கோணவேகத்தைக் கண்டுபிடி. மேலும் சக்கரத்தின் மையத்தைப்போதுத்து அதன் மிக உயரமான புள்ளியின் திசைவேகமென்ன?

30. மணிக்கு 96 கி.மீ. வேகத்தில் ஒடிக்கொண்டிருக்கும் ஒரு கிரேஸ் வண்டியின் மூச்சுக்கரத்தில் விட்டம் 4 மீ. தரைக்கு 3 மீ. உயரத்தில் சக்கரத்தின் மேலுள்ள இரு புள்ளிகளின் திசைவேகங்களைக் கண்டுபிடி.

31. சமதளத்தில் நழுவாமல் ஒரு சக்கரம் ஒரே சீராகச் சுழல்கிறது. அதன் மையம் ஒரு நேர்க்கோட்டில் நகருகிறது. சக்கரத்தின் மிக உயரமான புள்ளியின் திசைவேகம் தரைக்கு ஆரையின் பாதி உயரத்தி லுள்ள புள்ளியின் திசைவேகத்தைப்போல இரு பக்கமே நிறுபி.

32. இரு திசையான புள்ளிகளைப் பொறுத்து, P என்ற புள்ளியின் திசைக் கோணங்கள் சமமென்றால் P-யின் நிலம்படவாத ஒரு வட்ட மெனக் காண்பி.

33. 'a' ஆரையாகக் கொண்ட ஒரு வட்டத்தை ஒரே சுழியாக இரு துகங்கள் 'u' என்ற ஒரே திசைவேகத்துடன் சுற்றுகின்றன. ஒன்றைப் பொறுத்து மற்றதன் திசைக் கோணம் $\frac{\pi}{6}$ என்று காண்பி.

34. மூன்றையே 'n' 'n' என்ற திசைவேகங்களைக் கொண்டு இரு புள்ளிகள் '3a', '5a' என்ற ஆரகளைக் கொண்ட இரு, ஒரு மையப் புள்ளி வட்டங்களை உண்டாக்குகின்றன. அவைகளுக்கிடையேயுள்ள தூரம் '4a' ஆக இருக்கும்போது, அவைகளைச் செக்கும் நேர் கோட்டின் திசைக் கோணத்தைக் கண்டுபிடி.

35. 'a', 'b' ஆரகளையுடைய இரு, ஒரு மையப்புள்ளி வட்டங் களை உண்டாக்கும் இரு புள்ளிகள், ஆரகளுக்கு எதிர் மானுள் விதத்தில் திசைவேகங்களைக் கொண்டிருக்கிறது. புள்ளிகளுக்கிடையே யுள்ள சார்வேகம் அவைகளைச் செக்கும் கோட்டிற்கு கிணையாயுள்ள போது, அந்தப் புள்ளிகளின் வரையப்படும் ஆரகளுக்குக்கிடையேயுள்ள கோணம் 0.08^{-1} $\frac{2a}{a+b}$ எனக் காண்பி.

36. ஒரு துகள் ஒரே சீரான திசைவேகத்துடன் ஒரு நேர் கோட்டில் நகருகிறது. ஒரு திசையான புள்ளியைப் பொறுத்து, அதன் திசைக் கோணம் அந்தப் புள்ளியிலிருந்து துகளின் தூரத்தில் வர்க்கத்துக்கு எதிர் மாறெனக் காண்பி.

37. $+2r'$ $+r'$ ஆகையுடைய இரு ஒரு மையப்புள்ளி வட்டங்களை உண்டாக்கும் A, B இரு புள்ளிகள் மூன்றையே $'V', +2V'$ என்ற திசைவேகங்களுடன் வட்டத்தில் ஒரே திசையில் நகர்த்தால் $\cot \alpha = 2$ [சரீ திசைக் AB திசையில் இருக்கும்போது $\angle OAB = \alpha$ என்றால்] என்று திருப்தி.

38. A, B என்ற இரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்க்கோட்டின் நீளம் α . A, B நிலைகளின் திசைவேகங்கள் AB -யுடன் மூன்றையே α, β என்ற கோணங்களை உண்டாக்கினால் AB -ன் திசைக்கோணம் $\frac{V \sin (\alpha-\beta)}{\alpha \cos \beta}$ [$V = A$ -ன் திசைவேகம்] என்று காண்பி.

39. O என்ற புள்ளியை மையமாகவும் $r, 2r$ எக்பவைகளை ஆகையாகக் கொண்ட இரு ஒரு மையப்புள்ளி வட்டங்களை உண்டாக்கும் இரு துகள்கள் ஒரே சீரான சம திசைவேகங்கள் $'V'$ -யுடன் நகருகின்றன. முதலில், துகள்கள் O -ன் ஒரே பக்கத்தில் OAB விட்டமாகக் கொண்ட A, B என்ற புள்ளிகளில் தொடங்கி ஒரே திசையில் செல்கின்றன. சிறிய வட்டத்தை உண்டாக்கும் துகள் அதன் வட்டத்தின் சுற்றளவில் மூன்றில் ஒரு பங்கு தூரம் சென்றிருக்கும் போது, அவைகளின் சரீவேகம் $'V'$ என்றும், OAB -க்குச் செக்குத்தரக் உள்ளதென்றும் காண்பி.

40. $'V', 'V'''$ என்ற திசைவேகங்களுடன் இரு துகள்கள் $'a', 'a'''$ என்ற ஆகையுடைய இரு ஒரு மையப்புள்ளி வட்டங்களில் சுற்றுகிறது. அவைகளுக்கிடையேயுள்ள தூரம் $'r'$ ஆக இருக்கும்போது, அவைகளைச் சேர்க்கும் நேர்க்கோட்டின் திசைக்கோணம்

$$\frac{1}{2r^2} [(r^2 + a^2 - a'^2) V + (r^2 + a'^2 - a^2) V']$$
 எனக் காண்பி.

3. நேர்கோட்டியக்கம் (Rectilinear Motion)

1. ஒரே சீரான முடுக்கத்துடன் நேர்கோட்டில் இயக்கம்

துகள் ஒரே சீரான முடுக்கத்துடன் ஒரு நேர்கோட்டில் இயங்கும் போது, வேகமும், திசையேனும் ஒன்றேயாகும். திசையேனும் அதிசரித்துக்கொண்டேயிருந்தால் முடுக்கம் '+' குறிவுடையது. குறைபுடையது முடுக்கம் '-' குறிவுடையது.

இந்த நேர்கோட்டியக்கத்திற்குரிய மூன்று அடிப்படைச் சமன்பாடுகளை இப்பொழுது எண்ணிப்போம்.

2. தேற்றம்

' u ' திசையேனத்துடன், ஆரம்பிக்கும் ஒரு புள்ளி நேர்கோட்டில் இயங்குகிறது. அது இயங்கும் திசையில் ' f ' என்ற மாநிலி முடுக்கம் உண்டது. ' t ' நேரம் ஐழித்து திசையேனம் ' v ' என்றும், ஆரம்பப் புள்ளியிலிருந்து உண்ட தூரம் ' s ' என்றும் கொண்டால்,

$$(1) v = u + ft$$

$$(2) s = ut + \frac{1}{2}ft^2$$

$$(3) v^2 = u^2 + 2fs \text{ என்று நிரூபிக்க.}$$

(1) ' f ' என்பது மாநிலி முடுக்கத்தைக் குறிப்பதால், $f = \frac{dv}{dt}$ என நேரத்தில் உண்டாகும் திசையேனத்தின் மாறுதல். எனவே ' t ' நேரத்தில் திசையேனத்தின் உண்டாகும் மாறுதல் ' ft ' ஆகும். ஆரம்பத் திசையேனம் ' u ' ஆதலால், ' t ' நேரம் ஐழித்துத் திசையேனம் $v = u + ft$ ஆகும்.

(2) முடுக்கம் ஒரே சீரான உண்டதால், திசையேனம் ஒரு மாநிலி ஐகிதத்தின் அதிசரிக்கின்றது. எனவே, ' O '-யிலிருந்து ' t ' வரை புள்ளி இடைவெளி நேரத்தினுள்ள சராசரி திசையேனம், ஆரம்ப முடிவு திசையேனத்துக்கிடையேயுள்ள சராசரிக்குச் சமமாகும்.

$$\begin{aligned}
 \therefore 't' \text{ கிடைப்பவரி் தேரத்தில் சராசரி வேகம்} &= \frac{1}{2} (u+v) \\
 \text{தூசு கிப்பக்கும் தூரம்} &= \frac{1}{2} (u+v)t \\
 &= \frac{1}{2} (u+v+ft) \cdot t \\
 &= ut + \frac{1}{2} ft^2 \\
 \therefore s &= ut + \frac{1}{2} ft^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad v &= u+ft \text{ என்பதால்} \\
 v^2 &= u^2 + 2uft + f^2t^2 \\
 &= u^2 + 2f \left[ut + \frac{1}{2} ft^2 \right] \\
 &= u^2 + 2fs.
 \end{aligned}$$

முதல II: மேற்கண்ட முன்று சமன்பாடுகளையும் வகை கணித முறையில் திர்ணயிக்கலாம்.

't' தேரத்தில் தூரத்தி் ஏற்படும் திசைவேகம், முடுக்கம் கிடைவதில் $\frac{ds}{dt}$, $\frac{d^2s}{dt^2}$ என்பவைகளால் குறிக்கலாம்.

$$\therefore f = \frac{d^2s}{dt^2} \text{ ஆகும்.}$$

தொகை காண்கிம் (By integration),

$$\frac{ds}{dt} = ft + A \text{ என்கும்.}$$

$$t=0 \text{ என்றும்போது } \frac{ds}{dt} = u \text{ ஆகும்.}$$

$$u = A$$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = ft + u \quad \dots\dots(A)$$

$$\text{அதாவது } v = u + ft \quad \dots\dots(1)$$

(A)ஐ் தொகை காண்கிம்

$$s = \frac{1}{2} ft^2 + ut + B$$

$$t = 0 \text{ என்றும் } s = 0 \text{ ஆகும்.}$$

$$\text{எனவே } B = 0$$

$$\therefore s = ut + \frac{1}{2} ft^2 \quad \dots\dots(2)$$

$$f = \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{அகிலது} &= \frac{d}{dt} \cdot \left(\frac{ds}{dt} \right) \\
 &= \frac{dv}{dt} \\
 &= \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \\
 &= v \cdot \frac{dv}{ds} \\
 v \cdot dv &= f \cdot ds
 \end{aligned}$$

இதைத் தொகை காண்கில்

$$\frac{v^2}{2} = fs + C$$

$t = 0$ என்றும்போது $s = 0$ $v = u$ ஆகும்.

$$\frac{u^2}{2} = 0 + C$$

$$\therefore \frac{v^2}{2} = fs + \frac{u^2}{2}$$

$$\text{அகிலது } v^2 = u^2 + 2fs \text{ ஆகும்.} \quad \dots\dots(3)$$

கிளைத்தேற்றம் 1: துகள் ஒய்விலிருந்து விழங்கும்போது $u = 0$ ஆகும். எனவே விபக்கச் சமன்பாடுகள் மூன்றையும்,

$$v = ft$$

$$s = \frac{1}{2} ft^2$$

$$v^2 = 2fs \text{ என்று சொல்லலாம்.}$$

2. துகள் ஒரு வளைவரை பாதையில் (Curvilinear path) விழங்கும்போது, அது விழங்கும் திசைப்பாதையில் தொடுகோட்டிலேயே இருக்கும். திசையெனச் 'x'-ஊடல் ஆரம்பித்து 'f' என்ற சீரான முக்கோணத் துகள் விழங்கும்போது, மேற்கண்ட மூன்று அடிப்படை விபக்கச் சமன்பாடுகள் வளைவரை பாதைக்கும் பொருத்தும்.

3. தேற்றம்

குறிப்பிட்ட ஒரு விநாடி நேரத்தில் துகள் விழங்கும் தூரத்தைக் கண்டுபிடிக்க,

't' பாவது விநாடிகில் துகள் விழங்கும் தூரம்

= 't' விநாடிகளில் துகள் விழங்கும் தூரம்—(t-1) விநாடிகளில் துகள் விழங்கும் தூரம்

$$\begin{aligned}
 &= [ut + \frac{1}{2}ft^2] - [u(t-1) + \frac{1}{2}f(t-1)^2] \\
 &= u + \frac{1}{2}f[t^2 - (t-1)^2] \\
 &= u + \frac{1}{2}f(2t-1)
 \end{aligned}$$

4. வீழும் பொருள்களின் இயக்கம் (Motion of Falling Bodies)

எனமான பொருள் எதுவும் பூமியை நோக்கி விழும்போது, அதன் வேகம் அதிகரித்துக்கொண்டே போகும். அதாவது பொருள் முடுக்கத் தடன் கிடைக்கிறது. இந்த முடுக்கம் பூமியின் ஈர்ப்புச் சக்தியால் ஏற்படுகிறது. எனவே இந்த முடுக்கத்தைப் பூமியின் ஈர்ப்பு எனலாம்.

பல சோதனைகளின்படி, ஈர்ப்பின் தடுக்கும் தன்மையைத் தவிர்த்து நோக்கினால், இந்த முடுக்கம் ஒரு மாறிலியாக இருக்கும். இது கீழ்மூல நிலைநிலையில் அமைபும். இதை 'g' என்ற எழுத்தால் குறிக்கலாம்.

ஒர் கிடத்தில் 'g'-ன் மதிப்பு மாறுதிருக்கும். பொருளின் பருமன் என, அதன் மிசையளச் சேர்க்கை இவை 'g'-ன் மதிப்பைப் பாதிக்காது. ஆனால் உடல் மட்டத்துக்கு மேலேயுள்ள உயரத்தையும், பூமியின் மத்திய கோட்டிலிருந்து உள்ள தூரத்தையும் பொறுத்து 'g'-ன் மதிப்பு மாறும்.

F.P.S. முறையில் 'g'-ன் மதிப்பை 32 அடிகள்/விநாடி² என்றும், C.G.S. முறையில் 981 செ. மீ./விநாடி² என்றும் கொள்வது மரபு.

5. பூமியின் ஈர்ப்புச் சக்தியினால் உண்டாகும் நிலை இயக்கம் (Vertical Motion due to Gravity)

ஒரு பொருள் 'u' என்ற ஆரம்பத் திசைவேகத்துடன் நேராகச் செறுத்தப்படுவதாகக் கொள்வோம். பூமியின் ஈர்ப்புச் சக்தியினால் உண்டாகும் முடுக்கமான 'g' இந்தத் திசைக்கு எதிர் திசையாக கிடைக்குவதால், அதை '-g' எனக் குறிப்பிடலாம். எனவே பொருள் மேலே செல்லைச் செல்ல, திசைவேகம் குறைகிறது. கடைசியாக அது '0' ஆகித்து பூச்சியமாகிறது. அப்பொழுது ஒரு தொடி நேரத்துக்கு ஒய்விடுக்கிறது. ஆனால் உடனே கீழ்முகத் திசையில் திசைவேகம் உண்டாகப்பட்டுப் பொருள் கீழ்நோக்கி விழுகிறது.

எனவே மேல் நோக்கி கிடைக்கத்தகுதிய சமன்பாடுகள்,

$$\begin{aligned}
 v &= u - gt \\
 s &= ut - \frac{1}{2}gt^2 \\
 v^2 &= u^2 - 2gs \quad \text{ஆகும்.}
 \end{aligned}$$

மிக உயரமான புள்ளியில் $v=0$ என்பதால்

$$\begin{aligned}
 u - gt &= 0 \\
 t &= \frac{u}{g} \quad \text{ஆகும்.}
 \end{aligned}$$

எனவே மிக உயரமான புள்ளியை அடையப் போகும் எடுத்ததுக் கொள்ளும் நேரம் $\frac{u}{g}$ ஆகும்.

மிக உயரமான தூரம்

$$0 = u^2 - 2gh - \text{விருத்து}$$

$$s = \frac{u^2}{2g} \text{ ஆகும்.}$$

மேலும், 't' நேரம் எடுத்ததுப் போகும் "h" உயரமடைந்தால்

$$h = ut - \frac{1}{2}gt^2$$

$\therefore gt^2 - 2ut + 2h = 0$ இது 't'-ல் ஒரு மிகுபடிச் சமன்பாடாகும். இதன் மூலங்கள் t_1, t_2 என்ற இரண்டும் மிகையாகவேயுள்ளது. ஏனெனில் $t_1 + t_2 = \frac{2u}{g}$; $t_1 \times t_2 = \frac{2h}{g}$.

மீதம் மிகு மிகையான மதிப்புகளில் குறைந்த மதிப்புள்ள t_1 போகும் மேலே செல்லும்போது 'h' தூரத்தை எட்ட எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம். அது மீண்டும் மேலே சென்று திரும்ப வந்து 'h' தூரத்தை அடைய எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் ' t_2 ' எனலாம்.

போகும் வீச்சு, புள்ளியிலிருந்து 'h' உயரமிருக்கும்போது, அதன் திசையென

$$u^2 = u^2 - 2gh \text{ என்ற சமன்பாட்டால் குறிக்கப்படும்.}$$

$$\text{எனவே } v = \pm \sqrt{u^2 - 2gh} \text{ ஆகிறது.}$$

போகும் மேலே சென்று 'h' உயரம் அடையும்போது $v = +\sqrt{u^2 - 2gh}$ ஆகவும், அது மேலும் சென்று திரும்பிவந்து 'h' உயரம் அடையும்போது $v = -\sqrt{u^2 - 2gh}$ ஆகவும் இருக்குமென்பது தெளிவு.

5.1. தடையின்றிக் கீழே விழும் பொருள்கள் (Freely Falling Bodies)

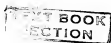
கீழ்முடித் திசையை மிகையாகக் கொண்டால் ஆரம்பத் திசையென $u = 0$ ஆகும். 'g' மிகை குறியையே கொண்டிருக்கும். 'h' உயரத்திலிருந்து போகும் விழுமானால் மீய்க்கல் சமன்பாடுகள்,

$$v = gt$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

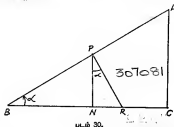
$$v^2 = 2gh$$

$$v = \sqrt{2gh}$$



கிடைத்த 'ஈ' உயரம் தங்குதடைபின்னிற் பொருள் விரும்போது
ஏற்படும் திசைவேகம் என்னாம்.

6. உராய்வற்ற சாய்தளத்தில் (Smooth Inclined Plane)
துகளின் நியுகம்



கிடைத்ததைக் குறித்து 'அ' கோவைத்தில் சரித்துள்ள உராய்வற்ற சாய்தளத்தின் தலை வெட்டுமுகம் ABC எனக் கொள்க.

P என்பது அதன்மேல் உள்ள ஒரு துகளாகி நோக்கி.

தூணில் கீழ்க்கதிரைத் தடுத்திருந்து நின்று இந்தச் சாய்தளம் கிராம விட்டால், தூண் தேர் நிலை நிலையில் '9' முன்க்கதிரை உந்தப்பட்டுக் கீழே விழும்.

திறைதிசைபெறுகின்ற முருகிசைம் 'ஏ'யி AB-க்குச் செங்குத்துத் திசை யான PR திசையில் ஏ $\cos \alpha$ என்ற கூறுசெய் PB திசையில் ஏ $\sin \alpha$ என்ற கூறுசெய் மிடுகின்றன.

சாய்நகரத்திற்குத் செங்குத்துத் திசையில் துணுக்கு நிலக்கல் கிடையா. எனவே தான் $g \sin \phi$ என்ற முடுக்கத்துடன் சாய்நகரத்தின் நடுவுலிருந்து, நடுவும் தூரம் 'l' என்று கொண்டால் தூரம் நடுவியவுடன் அதன் திசையோடும்,

$$v^2 = 2g \sin \alpha \cdot l$$

$$v = \sqrt{2g \sin \alpha \cdot l}$$

$$= \sqrt{2\sigma_p P N}$$

$$= \sqrt{[P\text{-விகித நிலைதூரத்துக்கு ஒத்த உயரத்தில் தூண் தளையின் மீது விழும்போது ஏற்படும் திசைவேகமாவும்]}$$

ஆனால் '1' குராம் நழுவு எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் துருள்,

PN உயரம் விழுத எடுக்கும் நேரத்துக்குச் சமமாகிறது.

$$l = 0 + \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g \sin \alpha}}$$

ஆனால் PN தூரம் விழுத தூசு எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம்,

$$PN = 0 + \frac{1}{2} g t^2$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{2PN}{g} \\ &= \frac{2l \sin \alpha}{g} \end{aligned}$$

$$= 2t$$

இதற்கு மாறாக, தூசு ' u ' என்றும் ஆரம்பத் திசையேகம் கொண்டு சமநளத்தின்மேல் எறிப்பட்டால், $f = g \sin \alpha$ என்று கொண்டு அதன் இயக்கத்தைக் கவனிக்கலாம்.

$$v = u - g \sin \alpha \cdot t$$

$$s = ut - \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2$$

$$v^2 = u^2 - 2g \sin \alpha \cdot l$$

' u ' என்றும் ஆரம்ப வேகத்துடன் அனுப்பப்படும் தூசு அடை யும் மிக அதிகபட்ச தூரம்

$$0 = u^2 - 2g \sin \alpha \cdot l$$

$$l = \frac{u^2}{2g \sin \alpha}$$

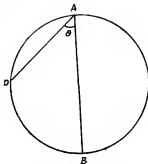
அதற்குரிய நேரம்

$$t = \frac{u}{g \sin \alpha} \text{ ல்லும்.}$$

7. தேற்றம்

நிலைதிசையில் உட்கு ஒரு வட்டத்தின் மிக உயரமான புள்ளியின் வழியாக வரையப்படும் உதாரவந்த நகன்களின் வழியே நழுவுங் போரும் எடுத்துக்கொள்ளும் நேரங்கள் சமமே.

நிலைதிசையிலுள்ள வட்டத்தின் மிக உயரமான புள்ளி A என்று கொள்வ. அதன் வழியாக வரையப்படும் வட்டம் AB எனும் நான் AD என்றும் கொள்வ.



படம் 31.

$\angle DAB = \theta$ எனும், $AD = l$ எனும் கொள்.

$l = 2a \cos \theta$ [a = வட்டத்தின் ஆரம்]

AD திசையில் முடுக்கத்தின் கூறு $g \cos \theta$ ஆகும்.

ஒய்விலிருந்து தொடங்கி $g \cos \theta$ முடுக்கத்துக்குக் கட்டுப்பட்டு, AD தூரம் துள்ளி விழக்க எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம்

$$l = \frac{1}{2} g \cos \theta T^2.$$

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{2l}{g \cos \theta}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 2a \cos \theta}{g \cos \theta}} \\ &= \sqrt{\frac{4a}{g}} \end{aligned}$$

T -இன் மதிப்பு ' θ '-வைச் சார்விடில் மாறாமல் அது AB நிலை தூரம் துள்ளி விழக்க எடுத்துக்கொள்ளும் நேரத்துக்குச் சமம்.

குறிப்பு: மிகக் குறைவான உயரத்திலுள்ள புள்ளியான B -ன் வழியாக வரையப்படும் நாண்களின் வழியே நழுவும் துகள்கள் எடுத்துக்கொள்ளும் நேரமும் சமமென்பது தெளிவு.

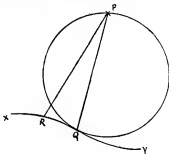
8. மிக விரைவாக நிறங்குதற்கூறிய நேர்க்கோடுகள் (Lines of quickest descent)

P என்ற புள்ளி கொடுத்திருப்பதாகக் கொள்வோம். அதன் வழியாகச் செல்லும் நிலைநிலையில் XY என்ற வளைவரை இருப்பதாகவும் P -விலிருந்து தொடங்கும் ஒரு தூள் ஒரு நேர்க்கோட்டில் நழுவி XY -ஐ அடைவதானால் அது அப்படி நழுவுவதற்கூறிய நேரத்தைக் கண்டறிக்க மிகக் குறைந்த நேரத்திற்கூறிய நேர்க்கோட்டை, மிக விரைவாக நிறங்குதற்கூறிய நேர்க்கோடு எனலாம்.

குறிப்பு : இப்படிப்பட்ட நேர்க்கோடு P -க்கும் XY -க்கும் இடையே உள்ள மிகக் குறைந்த தூரமாக இருக்க வேண்டியதில்லை.

8.1. நேற்றம்

P -விலிருந்து அதன் வழியாக வரையப்படும் நிலைநிலைகளான வளைவரைக்கு மிக விரைவாக நிறங்குதற்கூறிய நேர்க்கோடு PQ என்றால், Q என்பது P -ஐ மிக உயரமாக வைத்து வரையப்படும் வட்டம் வளைவரையைத் தொடும் புள்ளியாகும்.



படம் 32.

XY என்பதை வளைவரையாகவும் அதன் நிலைநிலையில் P என்ற புள்ளி இருப்பதாகக் கொள்வோம். P -ஐ மிக உயரமாகக் கொண்டு XY -ஐ வேளியே தொடும்படியாக ஒரு வட்டம் வரைக. அது XY -ஐ Q -யில் தொடக்கும். XY -ல் R என்பது வேறு ஏதாவதொரு புள்ளி ஆகட்டும். P -ஐயும் R -ஐயும் சேர்க்கும் நேர்க்கோடு வட்டத்தை மீண்டும் 'L' என்ற புள்ளியில் வெட்டும்.

$$\therefore PR > PL$$

$\therefore PR$ -ன் வழியாகத் துகச் நழுவ எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம்

$> PL$ -ன் வழியாகத் துகச் எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம்

ஆனால் PL -ன் வழியாகத் துகச் நழுவ எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் $= PQ$ -வின் வழியாக எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம்.

PR -ன் வழியாக நழுவ நேரம் $> PQ$ -வின் வழியாக நழுவ நேரம்.

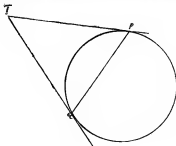
R என்பது XY -ன் மேலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளி ஆதலால், PQ -வின் வழி நழுவ நேரம் $< P$ -ன் வழியாக வளைவரைக்கு வரையப்படும் நேர்கோட்டின் வழியாக நழுவ வேண்டிய நேரம்.

$\therefore PQ$ மிக விரைவாக நிறங்குதற்குரிய நேர்கோட்டாகும்.

குறிப்பு : மிதேபோல், P -லிருந்து அதே நிலை சமதளத்திலிருந்து வளைவரைக்கு மிக விரைவாக ஏறுவதற்குரிய நேர்கோடு PQ என்றால் Q என்பது P -ன் மிகக் குறைவான உயரத்தில் கவத்து வரையப்படும் வட்டக் வளைவரை தோறும் புள்ளியாகும்.

8-2. கிளைத்தேற்றம்

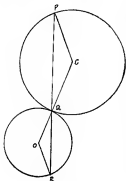
P -லிருந்து அதே நிலைமத்திலுள்ள XY என்ற நேர்கோட்டிற்கு மிக விரைவாக நிறங்குதற்குரிய நேர்கோட்டைக் கண்டுபிடிக்க.



படம் 33.

P -யில் வட்டத்துக்கு PT என்ற தொடுகோடு வரலாம். PQ நிழை நிகையின் உச்சந்தாளும், P வட்டத்தின் மிக உயரமான புள்ளியாதலாலும், PT கிடைநிகையின் மிகுக்கும், நித்தக் கோடு XY இ T -ல் சந்திக்கட்டும். XY -ல் T -க்குக் கீழே $T'Q = TP$ என்றபடி Q இக் கண்டுபிடித்தால் TQ என்பது நமக்கு வேண்டிய கோடாகும்.

9-3. வினாத்தேற்றம் 2



படம் 34.

$$\therefore PC \parallel OR$$

$$\angle QPC = \angle ORQ$$

$$= \angle OQR \quad [\because OQ = OR]$$

$$= \angle PQC$$

$$CP = CQ$$

மேலும் $OC = OQ + QC$ ஆகவே C கட்டுத்தொகை.

எனவே PC மிக உயரமாகக் கொண்டு, அதே நிழை சமதளத்தின் வரையப்படும் வட்டம் கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தைக் Q -யில் தொட்டும்.

$\therefore PQ$ என்பது நமக்கு வேண்டிய நேர்கோடாகும்.

P -மிகுந்து அதே நிழை தளத்திலுள்ள ஒரு வட்டத்துக்கு வரையப்படும் மிக விரைவாக நிறைகுவதற்குரிய நேர்கோட்டைக் கண்டுபிடிக்க.

P -ல் நிழைதளத்திலுள்ள வட்டத்தின் மையப் புள்ளி O என்றும், அதன் மேல் மிகக் குறைவாக உயரத்திலுள்ள புள்ளி R என்றும் கொள்க.

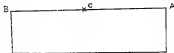
PQ யும் RQ யும் சேர்க்க. இது வட்டத்தை Q என்ற புள்ளியில் வெட்டினால் PQ என்பது மிக விரைவாக நிறைகுவதற்குரிய நேர்கோடாகும்.

P வழியாக நிழைநிகையின் வரையப்படும் நேர்கோடு OQ இ நீட்டியபோது C -ல் சந்திக்கட்டும்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

1. மாதிரி மூடுக்கத்தின் ஒதுக்கொண்டிருக்கும் கிரயில் வண்டியில் கிரண்டு முடிவுகளும் ஒரு புள்ளியைத் தாண்டிச் செல்லும்போது அதன் திசைவேகம் U , V ஆகும். வண்டியின் தடுப்புக்கான அந்த புள்ளியைத் தாண்டிச் செல்லும்போது அதன் திசைவேகம் $\sqrt{\frac{U^2 + V^2}{2}}$ என்று காண்பிக்க.

x O



படம் 35.

கிரயில் வண்டியில் திசை ' I ' என்றும் தாண்டிச் செல்லவேண்டிய புள்ளி O என்றும் கொள்க.

மாதிரி மூடுக்கம் ' f ' என்க.

A , O இடம் தாண்டும்போது கிரயில் வண்டியின் திசைவேகம் $= U$

கிரயில் வண்டி ' I ' தூரம் தகத்ததவுடன்தான் B , O -க்கு வரும். எனவே அப்போது வண்டியின் திசைவேகம் V என்றும்

$$V^2 = U^2 + 2f \cdot l$$

கிரயில் வண்டி $\frac{l}{2}$ தூரம் தகரும்போது வண்டியின் தடுப்புக்கான வளை ' C ', PO அடைபடும்

$$\begin{aligned} V_C^2 &= U^2 + 2f \cdot \frac{l}{2} \\ &= U^2 + \frac{1}{2} [V^2 - U^2] \\ &= U^2 + \frac{V^2}{2} - \frac{U^2}{2} \\ &= \frac{U^2 + V^2}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore V_C = \sqrt{\frac{U^2 + V^2}{2}}$$

2. ஒரு துகள் மாதிரி முடுக்கத்துடன் நகர்த்துவொண்டிருக்கிறது. ஆரம்பித்த ஏழாவது, பதினென்றாவது விநாடிகளில் துகள் முறையே 640 செ.மீ., 920 செ.மீ. தூரம் நகர்த்தியிருக்கிறது. ஆரம்பத் திசை வேகத்தையும் முடுக்கத்தையும் கண்டுபிடிக்க.

ஆரம்பத் திசைவேகம் 'U' செ.மீ./விநாடி என்றும் மாதிரி முடுக்கம் 'f' செ.மீ./விநாடி² என்றும் எடுத்துக் கொள்க.

$$'t' - \text{ஆவது விநாடியில் துகள் நகரும் தூரம்} = U + \frac{1}{2}f(2t-1)$$

$$\therefore 640 = U + \frac{f}{2} \times 13$$

$$920 = U + \frac{f}{2} \times 21$$

$$\therefore 280 = 4f$$

$$\therefore f = 70 \text{ செ.மீ./விநாடி}^2$$

$$U = 640 - \frac{70}{2} \times 13$$

$$= 640 - 35 \times 13$$

$$= 640 - 455$$

$$= 185 \text{ செ.மீ./விநாடி.}$$

3. ஓர் மிரயில் நிலையத்திலிருந்து ஒப்பிலிருந்து தொடங்கி 2 கி.மீ. தூரத்திலுள்ள மற்றொரு மிரயில் நிலையத்துக்கு ஓர் மிரயில் வண்டி சென்று திரும்பிவருகிறது. வண்டி, எல்லாநேரம் தூரத்தில் முதல் நேரத்தில் மூன்று பங்கு தூரம் ஒரே சீராக முடுக்கப்பட்டு மீதி தூரத்தில் ஒரே சீராக எதிர் முடுக்கப்படுகிறது.

மிரயில் வண்டி, இந்தப் பிரயாணத்துக்கு எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் 4 நிமிடங்கள் என்றால், முடுக்கம், எதிர்முடுக்கம், மிக அதிகமான திசைவேகம் கிடைக்கின்ற மதிப்புகளைக் கண்டுபிடிக்க.



படம் 36.

PR தூரத்துக்குரிய முடுக்கம் f_1 என்றும்,

R-ல் மிரயில் வண்டியின் திசைவேகம் 'V' என்றும்,

RQ தூரத்திற்குரிய எதிர்முடுக்கம் f_2 என்றும் எடுத்துக்கொள்க.

PR தூரத்தை வண்டி கடக்க எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் t விநாடி ஆக என்றால்,

RQ தூரத்தைக் கடக்கவேண்டிய நேரம் $(240-t)$ விநாடிகளாகும்.

$$V = f_1 t \quad \dots\dots(1)$$

$$150,000 = \frac{3}{2} f_1 t^2 \quad \dots\dots(2)$$

$$\begin{aligned} V^2 &= 2f_1 \times 200,000 \quad \dots\dots(3) \\ &= 400,000f_1. \end{aligned}$$

RQ தூரத்தை வண்டி கடக்கும்போது, ஆரம்பத் திசைவேகம் V , முடிவு திசைவேகம் 0. முடுக்கம் $-f_2$ ஆகும்.

$$0 = V - f_2(240-t) \quad \dots\dots(4)$$

$$50,000 = V(240-t) - \frac{3}{2} f_2(240-t)^2 \quad \dots\dots(5)$$

$$0 = V^2 - 2f_2 \times 50,000 \quad \dots\dots(6)$$

சமன்பாடுகள் (3), (6)-லிருந்து

$$400,000f_1 = 100,000f_2$$

$$4f_1 = f_2$$

சமன்பாடுகள் (1), (4) இவைகளை நோக்கும்போது,

$$f_1 t = f_2(240-t)$$

$$= 4f_1(240-t)$$

$$t = 960 - 4t$$

$$5t = 960$$

$$t = 192$$

சமன்பாடு (2)-லிருந்து,

$$f_1 = \frac{2 \times 150,000}{192^2}$$

$$= \frac{300,000}{36864} \text{ செ.மீ./விநாடி}^2$$

$$f_2 = \frac{4 \times 300,000}{36864} \text{ செ.மீ./விநாடி}^2$$

மிக அதிக திசைவேகம் $= V$

$$= \frac{300,000}{36864} \times 192$$

$$= \frac{300,000}{192} \text{ செ.மீ./விநாடி}^2$$

4. ஓர் மிரயில் வண்டியின் வேகம் 0-லிலிருந்து 'U' வரை 'உ' என்ற ஒரே விதிதத்தில் அதிகரிக்கிறது. பிறகு சிறிது நேரம் வேகம்

ஒரேநிலையில் இருந்து ஏறகு 'β' என்ற ஒரே சீரான விசைத்திசில் '0'-க்குக் குறைகிறது. இரண்டில் வண்டி சென்ற மொத்தத் தூரம் 'l' என்றால் அதற்கான நேரம்

$$\frac{l}{V} + \frac{U}{\alpha} \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right] \text{ என திருப்தி.}$$

't' நேரத்தில் இரண்டில் வண்டியின் வேகம் '0'-விலிருந்து 'U' வரை அதிகரிக்கட்டும். சென்ற தூரம் 's' என்று கொள்க.

$$U = \alpha t_1 \quad \dots\dots(1)$$

$$s_1 = \frac{1}{2} \alpha t_1^2 \quad \dots\dots(2)$$

$$U^2 = 2\alpha s_1 \quad \dots\dots(3)$$

அடுத்த 't₂' நேரத்தில் வேகம் மாறாமலிருக்கட்டும். அப்பொழுது வண்டி சென்ற தூரம் 's₂' ஆகக் கொள்க.

$$s_2 = U t_2 \quad \dots\dots(4)$$

வண்டியின் வேகம் '0'-க்குக் குறையும் நேரம் 't₃' ஆகவும், அப்பொழுது சென்ற தூரம் s₃ ஆகவும் கொள்க.

$$0 = U - \beta t_3 \quad \dots\dots(5)$$

$$s_3 = U t_3 - \frac{1}{2} \beta t_3^2 \quad \dots\dots(6)$$

$$0 = U^2 - 2\beta s_3 \quad \dots\dots(7)$$

s₁ + s₂ + s₃ = l என்று கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

't₁ + t₂ + t₃'ஐக் கண்டுபிடிக்க,

(1), (4), (5)-விலிருந்து

$$t_1 = \frac{U}{\alpha} \quad \dots\dots(8)$$

$$t_2 = \frac{s_2}{U} \quad \dots\dots(9)$$

$$t_3 = \frac{U}{\beta} \quad \dots\dots(10)$$

(2), (6)-விலிருந்து

$$\frac{s_1}{U} = \frac{t_1}{2} \quad \dots\dots(11)$$

$$\begin{aligned} \frac{s_3}{U} &= t_3 - \frac{t_3}{2} \\ &= \frac{t_3}{2} \end{aligned} \quad \dots\dots(12)$$

(9) + (11) + (12) என்றும்,

$$\frac{t_1 + t_2 + t_3}{U} = \frac{t_1}{2} + \frac{t_2}{2} + \frac{t_3}{2}$$

$$\frac{l}{U} = (t_1 + t_2 + t_3) - \frac{t_1}{2} - \frac{t_2}{2}$$

$$(t_1 + t_2 + t_3) = \frac{l}{U} + \frac{t_1}{2} + \frac{t_2}{2}$$

(3), (10) சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$t_1 + t_2 + t_3 = \frac{l}{U} + \frac{U}{2\alpha} + \frac{U}{2\beta}$$

$$= \frac{l}{U} + \frac{U}{2} \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right]$$

5. கிணற்றுக்குள் போட்ட கம் அதன் அடிவை விநாடிக்கு 96 அடி திசைவேகத்தில் அடைகிறது. கம் கிணற்றில் விழுகின்ற சப்தம் மேலே செல்பதற்கு கம் கீழே போடப்பட்ட நேரத்திலிருந்து 370 விநாடிகள் ஆகின்றன. சப்தத்தின் திசைவேகம் என்ன?

கிணற்றின் ஆழம் 'h' அடிகள் என்போம்.

$$\therefore 96^2 = 0 + 2gh. \quad [g = 32]$$

$$64h = 96 \times 96$$

$$\therefore h = 144$$

கீழே விழும் நேரம் 't' என்றும்

$$96 = gt$$

$$\therefore t = 3 \text{ விநாடிகள்.}$$

சப்தம் 144 அடிகள் மேலே வரப் பிடிக்கும் நேரம்,

$$370 - 3 = \frac{70}{90}$$

$$\therefore \text{சப்தத்தின் திசைவேகம்} = \frac{144}{\frac{70}{90}}$$

$$= \frac{16}{\frac{144 \times 70}{9}}$$

$$= 1120 \text{ அடிகள்/விநாடி.}$$

6. 480 அடி உயரத்திலுள்ள கட்டடத்தின் உச்சியிலிருந்து ஒரு பந்து கீழே போடப்பட்டது. அதே நேரத்தில், கற்புற்று பந்து கீழே இருந்து விநாடிக்கு 160 அடி திசைவேகத்துடன் நேர்மேலே எதிர்ப்பு படுகிறது. பந்துகள் ஒன்றையொன்று கடக்கும் கிடைத்தின் உயரத்

தையும் அதற்கான நேரத்தையும் கணக்கிடுக. அவைகளுக்குக்கிடையே உள்ள சாத்தியவேகத்தைக் காண்பிடி.

't' விநாடிகள் கழித்து கிரண்டு பத்துகள் சத்திப்பதாகக் கொள்ளுவோம். அப்பொழுது சத்திக்கும் இடத்தின் உயரம் தரைக்கு மேலே 'h' அடிகள் எனவும், கிரண்டு பத்துகளின் திசைவேகங்கள் முறையே V_1 , V_2 என்றும் கொள்க.

$$V_1 = gt \quad \dots\dots(1)$$

$$480 - h = \frac{1}{2}gt^2 \quad \dots\dots(2)$$

$$V_2 = 160 - gt \quad \dots\dots(3)$$

$$h = 160t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \dots\dots(4)$$

$$(2)+(4)$$

$$480 = 160t$$

$$\therefore t = 3 \text{ விநாடிகள்}$$

$$h = 480 - \frac{1}{2} \times 32 \times 9$$

$$= 480 - 144$$

$$= 336 \text{ அடிகள்}$$

$$V_1 = 32 \times 3 = 96 \text{ அடிகள்/விநாடி}$$

$$V_2 = 160 - 32 \times 3$$

$$= 160 - 96$$

$$= 64 \text{ அடிகள்/விநாடி}$$

$$\text{சாத்திய வேகம்} = 96 + 64$$

$$= 160 \text{ அடிகள்/விநாடி.}$$

7. சாய்நகரத்திலேயே நழுவீச் செல்லும் ஒரு துகள் 4-ஆவது விநாடியில் 1716.75 செ.மீ. தூரம் சென்றுகிறது. நகரத்தின் சாய்வு வேகத்தைக் காண்பிடி.

't'வது விநாடியில் ஒரே சீரான முடுக்கத்துடன் கியக்கும் துகள் நகரும் தூரம் $= U + \frac{f}{2}(2t-1)$

$$\text{கியக்கு } U=0 \quad t=4$$

$$\therefore 1716.75 = \frac{f}{2} \quad (7)$$

$$\frac{3433.50}{2} = f$$

$$\therefore f = 490.5$$

$$f = g \sin \alpha$$

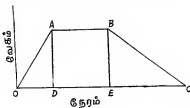
$$\sin \alpha = \frac{490.5}{981}$$

$$[\text{மிகு, } g = 981 \text{ செ.மீ./விநாடி}^2 \text{ என்பதைக் கவனிக்க}]$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

8. ஓர் மீரலில் வண்டி ஒய்விலிருந்து புறப்படும் மிடத்திற்கும் போய் நித்தும் மிடத்திற்கும் இடையே உள்ள தூரம் 2 மைல்கள். அதற்கான நேரம் 4 நிமிடங்கள். வண்டியின் அதிகபட்ச வேகம் மணிக்கு 45 மைல்கள். முடுக்கமும் எதிர்முடுக்கமும் ஒரே சீரானவை. அதிகபட்ச வேகத்தில் வண்டி ஓடும் தூரத்தைக் கண்டுபிடி.



படம் 37.

OABC என்பது நேரம்—நிகரவேகம் வரைபடத்தைக் குறிக்கும். OA சீரான முடுக்கத்தையும் AB சீரான அதிகபட்ச நிகரவேகத்தையும் BC சீரான எதிர்முடுக்கத்தையும் குறிப்பதாகக் கொள்வோம்.

$$AD = BE = 45 \text{ மைல்கள்/மணி} = \frac{3 \times 45 \times 22}{15} \text{ அடிகள்/விநாடி}$$

$$OC = 4 \text{ நிமிடங்கள்} = 240 \text{ விநாடிகள்}$$

$$4 \text{ நிமிடங்களில் வண்டி ஓடும் தூரம்}$$

$$= OCB \text{-ன் பரப்பளவு}$$

$$= (\triangle OAD + \text{நீண்ட. சதுரம் } DEBA + \triangle ECB)$$

என்பனவையின் பரப்பளவு

$$2 \text{ எம்மீ} = 10560 \text{ அடிகள்} = \frac{1}{2} OD \cdot DA + DA \cdot DE + \frac{1}{2} EC \cdot EB$$

$$= AD \left[\frac{1}{2} OD + DE + \frac{1}{2} EC \right]$$

$$\frac{160}{\frac{18560}{66}} = \frac{1}{2} OD + DE + \frac{1}{2} EC$$

$$160 = \frac{1}{2} [OD + EC + DE] + \frac{1}{2} DE$$

$$= \frac{1}{2} OC + \frac{1}{2} DE$$

$$= 120 + \frac{1}{2} DE$$

$$40 = \frac{1}{2} DE$$

$$80 = DE$$

சீரான அதிவட்டத்தின் வளைவு ஒளும் தூரம்

$$= DA \cdot DE$$

$$= 66 \cdot 80$$

$$= 5280 \text{ அடிகள்}$$

$$= 1 \text{ எம்மீ தூரம்}$$

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. 80 அடிகள்/விநாடி திசைவேகத்தில் நிலைநிலையில் மேல் நோக்கிச் செலுத்தப்படும் ஒரு துகளின் (1) திசைவேகம் 16 அடிகள்/விநாடி என்று எப்போது விருக்கும். (2) எதிர்ப்பட்ட மீடத்திற்குத் திரும்ப எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம். (3) எதிர் புள்ளியிலிருந்து 64 அடிகள் உயரத்திலிருக்கும் நேரம் நிலைநிலைக் கண்டுபிடி.

2. ஒரு கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து 40 அடிகள்/விநாடி திசைவேகத்துடன் நிலைநிலையில் சிறுநோக்கிச் செலுத்தப்படும் ஒரு பொருள் பூமியை அளவு 3 விநாடிகள் எடுத்துக்கொள்கிறதென்றால் கோபுரத்தின் உயரமென்ன?

3. கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து ஒவ்வொரு மீறும் ஒரு பொருள், கடைசி விநாடியில் மொத்தத் தூரத்தில் $\frac{1}{25}$ பாகம் மீயங்கு கிறது. கோபுரத்தின் உயரத்தைக் கண்டுபிடி.

4. நிலைநிலையில் மேல்நோக்கி ஒரு துகள் P திசைவேகத்துடன் செலுத்தப்படுகிறது. 't' விநாடிகள் கழித்து அதே ஆரம்பத் திசைவேகத்துடன் மத்தெரு துகள் அதே திசையில் செலுத்தப்படுகிறது. அவைகள் சந்திக்கும்போது

$$(1) \text{ மீறண்டின் திசைவேகம் } \frac{g}{2}$$

(2) கிரண்டாவது துகள் எதிர்ப்பட்ட நேரத்திலிருந்து $\left(\frac{t}{2} + \frac{u}{g}\right)$

விநாடிகள் ஆகியிருக்கும்.

(3) செழுத்தப்பட்ட புள்ளியிலிருந்து $\frac{4U^2 - g^2 t^2}{8g}$ அடிகள் உயரம்

சென்றிருக்கும் என்று திருப்தி.

5. ஒரு பந்து நிலைநிலையில் மேலே நேரக்கி 128 அடிகள்/விநாடி திசைவேகத்துடன் செழுத்தப்படுகிறது. 5 விநாடிகள் கழித்து மீடுக்கு மிடத்தைக் கண்டுபிடி. மேலே எதிர்ப்பட்ட பந்து திரும்பி வந்து எதிர்புள்ளிக்குக் கீழே 120 அடி ஆளுத்திலுள்ள கிணத்தில் விழுந்தால், அப்படி விழும் நேரத்தையும் கண்டுபிடி.

6. ஒரு துகள் சீரான முடுக்கத்துடன் இயங்குகிறது. ஆரம்பித்த நேரத்திலிருந்து 7-ஆவது, 9-ஆவது விநாடிகளில் துகள் முறையே 640 செ.மீ., 920 செ.மீ. தூரம் நகருகிறது. ஆரம்பத் திசை வேகத்தையும் முடுக்கத்தையும் கண்டுபிடி.

7. ஒப்பிலிருந்து தொடங்கும் ஒரு துகள், சீரான முடுக்கத்துடன் இயங்குகிறது. $(n^2 + n + 1)$ -வது நொடியில் துகள் நகரும் தூரம், முதல் 'n' விநாடிகளில் நகரும் தூரமும் முதல் $(n + 1)$ விநாடிகளில் நகரும் தூரமும் சேர்த்த கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமானது என திருப்தி.

8. t_1, t_2, t_3 என்ற அடுத்தடுத்த கிடைவெளி நேரத்தில் ஒரே சீரான முடுக்கத்துடன் நகரும் துகளின் சராசரி திசைவேகங்கள் முறையே V_1, V_2, V_3 என்றும் $\frac{V_1 - V_3}{V_2 - V_3} = \frac{t_1 + t_2}{t_2 + t_3}$ என்று காண்பி.

9. U_1, U_2 ஆரம்பத் திசைவேகங்களான f_1, f_2 சீரான முடுக்கங்களுடன் கிரண்டு கார்டின் ஒரு பந்தவத்திற்காக நேரான பாதையில் விசைத்து செலுகின்றன. சேரவேண்டிய மிடத்தை அவைகள் ஒரே நேரத்தில் அடைந்தால், கார்டின் ஓடிய தூரம்,

$$\frac{2(U_1 - U_2)(U_1 f_2 - U_2 f_1)}{(f_1 - f_2)^2} \text{ என்று திருப்தி.}$$

10. மணிக்கு 60 மைல் வேகத்தில் ஓடிக்கொண்டிருக்கும் கிராபில் வண்டி நனது வேகத்தை, 800 அடிகள் தூரத்திற்குள் மணிக்கு 20 மைலாகக் குறைத்துக் கொண்டிருந்தது. அப்படியானால் எவ்வளவு தூரம் ஓடி வண்டி நிற்றும்? வண்டியின் வேகத்தைத் தடுக்கும் சக்தி $12\frac{1}{2}\%$ அதிகரிக்கப்பட்டால் 800 அடிகள் தூரத்திற்குள் வண்டியை நிறுத்தாமலெனக் காண்பி.

11. ஒரே சீரான முடுக்கத்துடன் கிபக்கும் ஒர் கிரயில் வண்டி அடுத்தடுத்த மைல் சுற்றுகள் 10 மைல்/மணி, 20 மைல்/மணி என்ற திசைவேகத்தில் கடக்கிறது. அடுத்த மைல் சுற்றிக் கடக்கும்போது வண்டியின் திசைவேகத்தைக் காண்போம். மேலும், ஒரு மைல் தூர முள்ள கிரைன்டு கிடைவெளிகளைக் கடக்கவேண்டிய நேரங்களையும் காண்போம்.

12. ஒப்பிவிடுத்து தொடங்கும் ஒர் கிரயில் வண்டி முதல் மைலில் மணிக்கு 60 மைல் திசைவேகத்தை எட்டி, அடுத்த 3 மைலில் வேகத்தைத் தடுக்கும் சக்தியினால் ஒப்பிவிட வலுவிடும். ஆனால், முதல் மைலில் பாதை பழுதுபட்டிருந்து வண்டி மணிக்கு 20 மைல் வேகத்திற்குமேல் செலக்கடாநென்றால் அது நிலையத்திற்கு 2 மணி 40 விநாடி தாமதமாக வரும்போல் காண்க.

13. ஒரே புள்ளியிலிருந்து ஒரே சமயத்தில் புறப்படும் கிரு துகள்கள் கிரைன்டு நேர்சொடுகளில் கிபக்குகின்றன. முதல் துகள் சீரான திசைவேகம் " U "-வுடனும் கிரைன்டாவது துகள் சீரான முடுக்கம் " f " உடனும் கிபக்குகின்றன. அவைகளின் சார்திசை வேகம் மிகக் குறைவாக கிருக்க $\frac{U \cos \alpha}{f}$ நேரமாகும்போதும், மிகக் குறைவான திசைவேகம் $U \sin \alpha$ எனவும் காண்க. [α =துகள்கள் கிபக்கும் நேர்சொடுகளுக்கிடையே உண்மையான கோணம்.]

14. A நிலையத்திலிருந்து B நிலையத்திற்குச் செல்லும் ஒர் கிரயில் வண்டி தன் பிரயாணத்தின் முதல் பகுதியில் " f_1 " முடுக்கத்துடன் செல் பகுதியில் " f_2 " எதிர்முடுக்கத்துடன் கிபக்குகிறது. A -யிலிருந்து ஒப்பிவிடுத்து புறப்படும் வண்டி, B நிலையத்திற்கு வந்து நின்று, A -யிலிருந்து B -க்குச் செல்லும் நேரம் T என்றால்

$$T = \frac{2s(f_1 + f_2)}{f_1 f_2}$$
 எனக் காண்க. [s = A -க்கும் B -க்கும் கிடைவிலுள்ள தூரம்.]

15. ஒரு நிலையத்திலிருந்து புறப்படும் கிரயில் வண்டி 8580 அடிக்கொண்ட நேரவிலைகள் அடுத்த நிலையத்தையடைந்து நின்று, 2 நிமிடம் 40 விநாடிகள் ஆகின்றது. முற்பகுதியில் சீரான முடுக்கத்துடனும், பிறகு 1 நிமிடம் 40 விநாடிகளுக்கு சீரான வேகத்துடனும் கடைசியில் பகுதியில் சீரான எதிர்முடுக்கத்துடனும் கிபக்குகிறது. முடுக்கத்திற்கான நேரம் எதிர்முடுக்கத்திற்கான நேரத்தைப்போல் கிரைன்டு பக்காணல் சீரான வேகத்தைக் காண்போம். முடுக்கம், எதிர்முடுக்கம் கிடைவெளிக் கதிப்பைக் காண்போம்.

16. ஓர் மீரலில் வண்டி ஒயிலிருந்து தொடங்கி 'f' என்ற சீரான முடுக்கத்துடன் இயங்கிய பிறகு 'U' என்ற சீரான திசைவேகத்துடன் ஒருகிறது. கடைசியில் 'f' என்ற சீரான எதிர்முடுக்கத்துடன் வண்டி அடுத்த நிலையத்தில் வந்து நித்திறது. வண்டி ஓடிய மொத்த தூரம் 's' என்றும் அதற்கான நேரம் 't' என்றும் கொண்டால் 'U' என்ற சீரான திசைவேகத்துடன் ஓடிய நேரம்

$$\sqrt{t^2 - \frac{4s}{f}} \text{ என்று திருபி.}$$

17. ஒரு துகள் நகர்ந்த தூரம் 's'ஐ x அச்சத் தூரமாகவும் திசைவேகம் 'U'ஐ y அச்சத் தூரமாகவும் கொண்டு ஒரு வளைவரை வரையப்பட்டால் மீரண்டு தூரங்களிடையே துகள் நகருவதற்கான நேரம், வரைபடத்தில், y அச்ச, வளைவரை, x அச்சில் அங்கிரு தூரங்களுக்கிடையேயுள்ள பரப்பால் குறிக்கப்படு மெனக் காண்பி.

18. 255 அடி உயரத்தில் உள்ள கோபுர உச்சியிலிருந்து கீழே போடப்படும் ஒரு பொருள் அதே நேரத்தில் கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து நிலைதிசையில் மேல்நோக்கி எறியப்படும் மற்றொரு பொருளைப் பாரி தூரத்தில் சந்திக்கிறது. மீரண்டாவது பொருளின் ஆரம்பத் திசைவேகம் என்ன?

19. நிலைதிசையில் மேல்நோக்கி, U செ. மீ./விநாடி திசைவேகத்துடன் ஒரு பொருள் எறியப்படுகிறது. 't' விநாடிகள் கழித்து மற்றொரு பொருள் அதே திசையில் அதே திசைவேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. அந்த இரு துகள்களும் $\left(\frac{t}{2} + \frac{U}{g}\right)$ விநாடி கழித்து, $\frac{4U^2 - g^2 t^2}{8g}$ தூரத்தில் சந்திக்குமெனக் காண்பி.

20. மேலிருந்து கீழ் விழும்போது ஒரு துகள் ஓரே தூரத்தைக் கடக்க ஓர் கிட்டத்தில் -க்கும் நேரத்தைவிட, மற்றோர் கிட்டத்தில் 'm' விநாடிகள் குறைவாகவும், n அடி/விநாடி திசைவேகம் அதிகமாகவும் இயங்குமானால், அந்த இரு கிட்டங்களின் பூமியில் சீர்ப்புச் சத்திகளில் பெருக்கிடை $\frac{m}{n}$ என்று திருபி.

21. 30° கோணத்தில் சாய்ந்திருக்கும் ஒரு வடிவழப்பான சாய்நளத்தில் மேல்நோக்கி 60 அடி/விநாடி திசைவேகத்துடன் ஒரு துகள் இயக்கப்படுகிறது. சாய்நளத்தின்மேல் துகள் நகர்ந்திருக்கும் தூரம், அதற்கான நேரம் இவைகளைக் கண்டுபிடி.

22. 40 அடி நீளமும் 9 அடி உயரமுள்ள சாய்தளத்தின் மேலிருந்து ஒரு துகள் நழுவி விடப்படுகிறது. தளத்தின் அடிமைய அமைப்பு எவ்வளவு நேரமாகும். அப்பொழுது துகளின் திசைவேகம் என்ன என்பதைக் கண்டுபிடி.

23. 0-மிருத்து வரையப்படும் நிலைநிலைநிலை O வழியாகச் செல்லும் நிலை-அச்சின் ஒரே பக்கத்தில் 30° , 60° கோணங்கள் சாய்த் திருக்கும் இரு நேர்க்கோட்டுக் கம்பிகளின் வழியாக 0-மிருத்து தொடங்கி இரு துகள்கள் நகருகின்றன. முதல் துகள் 0-மிருத்து வரைய வரைய வரைய துகளின் சாய்திசை வேகம் $\frac{1}{2}$ என்றும் அது நிலை திசைவேகமேயே இருக்கும் எனவும் திருப்தி.

24. 288 அடி நீளமும் 60 அடி உயரமும் உள்ள ஒரு சாய்தளம் உள்ளது. சாய்தளத்தின் மேலிருந்து நழுவுவதும் ஒரு துகள் சாய்தளத்தின் தளத்தில் மூன்று பாகங்களில் சம நேரத்தில் கட்டதால் அந்தச் சம நேரத்தைக் கண்டுபிடி.

25. அச்ச நிலைநிலைநிலை, மூன்று மேல்நேர்க்கிழமூன்று ஒரு பரவலையின் குவியத்திலிருந்து புறப்பட்டு ஒரு துகளின் மிக விரைவான இறங்குவதற்கான நேர்க்கோட்டின் தளம் பரவலையின் செவ்வகத்திற்குச் சமமானது என திருப்தி.

26. நிலைநிலைநிலை உள்ள ஒரு வட்டத்தின் நான்கு வழியாக நழுவுவதும் ஒரு துகள் வட்டத்தின் மிகக் குறைந்த உயரத்தில் வந்தடைகிறது. அப்பொழுது அதன் திசைவேகம் நான்கின் தளத்தின் மிகத்தத்தில் இருக்குமென திருப்தி.

27. நிலைநிலைநிலை உள்ள வட்டத்தின், கிடைநிலைநிலை உள்ள வட்டத்தின் மூன்றுமிருந்து புறப்பட்டு ஒரு நான்கின் வழியாகத் துகள் நழுவுகிறது. அது எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம், நான் நிலைநிலைநிலை உள்ளதாகும் கோணத்தின் இருக்கையில் வர்க்கமூலத்தின் மிகத்தத்தில் இருக்குமெனக் காண்பி.

4. இயக்க விதிகள் (Laws of Motion)

முத்திய அத்தியாயத்தில், துகளின் இயக்கத்தைப்பற்றி ஆராயும் போது, அந்த இயக்கம் உருவாகுவதற்கான காரணங்களைப்பற்றிக் கருதவில்லை. இப்போது அம்மாதிரிக் காரணங்களையும் அதன் விளைவுகளையும்பற்றி விரிவாக ஆராய்வோம். முதலில் விசை என்பதன் அடிப்படையான தத்துவத்தைப்பற்றிக் கித்திப்போம். விசையைப்பற்றித் தெளிவான வரையறை கொடுப்பது எளிதல்லென்றாலும், அதனால் உண்டாகும் விளைவுகளைக்கொண்டு, விசையின் போக்கை அறிவேம். மூக்கியமாக, பொருள்களின் ஓய்வுற்ற நிலையையோ, ஒரே சீரான இயக்கத்தையோ மாற்றக்கூடிய தன்மை விசைக்கு உண்டென்பதை நாம் உணர்ச்சிெனும்.

வரையறை: பொருளின் ஓய்வுற்ற நிலைமையை மாற்றவோ, மாற்றக்கூடிய சக்தியோ, அல்லது தேர்வோட்டில் அதன் சீரான இயக்கத்தை மாற்றவோ, மாற்றக்கூடிய சக்தியோ உண்டாக்கக்கூடிய காரணத்தை விசையெனலாம்.

குறிப்பு: விசைக்கு மதிப்பும், திசையும் உண்டாதலால் அது ஒரு வெக்டர் கணியலாகும்.

தற்போதைக்குப் பொருள்களைத் துகள்கள் என்றே கருதுவோம். இப்படிச் கருதுவதால் பொருள்களின் பல்வேறு பகுதிகளுக்கிடையே உள்ள தூரங்களைத் தவிர்த்தலாம். மேலும், பொருள்கள் தள்ளாத்தானே சுற்றும்போது ஏற்படும் விளைவுகளைப்பற்றிக் கவனிக்கவேண்டியதில்லை.

தீணிவு வரையறை: ஒரு பொருளின் தீணிவு என்பது அந்தப் பொருளிலுள்ள பருப்பொருளின் அளவாகும்.

குறிப்பு: எனவே, ஒரு பொருளின் தீணிவு அந்தப் பொருளின் தன்மைமையப் பொறுத்தது அல்லாமல் மாற்றப் பொருளின் தன்மைமையையோ அது பக்கத்தில் இருப்பதாலோ பாதிக்கப்படாது.

உந்தம் (Momentum) காரணம் : ஒரு பொருளின் எல்லாப் பகுதிகளும் இவ்வோ நேர்கோடுகளில் சமநிலை வேகங்களுடன் நிகழ்கின்றன, அதற்குப் பொருளின் உந்தம் என்பது, பொருளின் திணிவு, திசை வேகம் இவைகளின் பெருக்கத் தொகையாகும்.

ஒரு பொருளின் திணிவு 'm' என்றும், அது நிகழ்கும் திசை வேகம் 'V' என்றும் கொண்டால், உந்தம் $= m \times V$ ஆகும்.

உந்தத்தின் அளவு என்பது, அளவு திணிவுள்ள துகள் அல்ல திசைவேகத்தால் மிகவுயர்வதாகும். C.G.S. முறையில் அல்ல திணிவை 1 கிராம் என்றும் அல்ல திசைவேகம் விநாடிக்கு 1 செ.மீ. என்றும் கொள்வதால் 1 கிராம் திணிவுள்ள பொருள் 1 செ. மீ./விநாடி திசைவேகத்தில் நிகழ்கும்போது உண்டாகும் உந்தமே அல்ல உந்தமாகும். இதை செ. மீ. கிராம் அலகுகள் எனலாம். F.P.S. முறையில் 1 பவுண்டு திணிவுள்ள பொருள் 1 அடி/விநாடி திசை வேகத்தில் நிகழ்கும்போது உண்டாகும் உந்தமே அல்ல உந்தமாகும். இதைப் பவுண்டு அடி அலகுகள் எனலாம்.

குறிப்பு : உந்தம் ஒரு வெக்டர் கணியமாகும். mV உந்தம் 'V' திசைவேகத்தின் திசையிலே நிகழ்கும். எனவே, 'V' திசை வேகத்திற்கு OX , OY திசைகளில் V_1 , V_2 என்று கூறுகள் இருந்தால், mV உந்தத்திற்கும் mV_1 , mV_2 என்ற உந்தங்கள் OX , OY திசைகளில் உண்டு.

நியூட்டனின் நியூட்டனின் விதிகள்

1. ஒவ்வொரு பொருளும் ஒய்வுற்ற நிலையிலேயோ, நேர்கோட்டில் சீரான நிகழ்கத்திலேயோ இருக்கும். இந்த நிலை மாற, வெளியே இருந்து அமுத்தக்கூடிய விசையிருத்தல் வேண்டும்.

2. ஒர் அல்ல நேரத்தில் உந்தத்தின் மாறுதல், அமுத்தக்கூடிய விசைக்கு விதிதாராளமாக இருக்கும். அந்த மாறுதல், விசை நிகழ்கும் நேர்கோட்டுத் திசையிலேயே அமையும்.

3. ஒவ்வொரு செயலுக்கும், சமமான எதிர்ச்செயல் இருக்கும். அல்லது இரு பொருள்களுக்கிடையே உள்ள செயல்கள் சமமானவுள் எதிர் திசையில் அமையும்படியும் இருக்கும்.

இந்த விதிகள் வேறு அமைப்புகளில் வெளியிடப்பட்டிருந்தாலும், முறையாக வெளியிட்ட பெருமை நியூட்டனுடையதாகும்.

இந்த விதிகளுக்கான நீர்வுகள் செயல்முறையாலேயோ அல்லது கணித ரீதியாகக் கொடுக்கப்பட முடியாவிட்டாலும், நம்மைச்

சுற்றியுள்ள பொருள்களின் கியக்கங்கள் மேற்கண்ட விதிகளைச் சார்ந்திருக்கின்றன என்பது ஒரு பெரிய உண்மையாகும்.

மீத விதிகளின் உண்மையைக் கண்டுபிடிக்கும்பொழுது, திபுட்டனின் மற்ொரு விதிகைக் கவனிப்பது நல்லது. அதை திபுட்டனின் சுத்புச் சக்தி விதியெனலாம். அந்த விதிப்படி: பொருளின் ஒவ்வொரு துகளும் மற்ற ஒவ்வொரு துகளையும் தன் பக்கம் இழுக்கிறது. அதற்கான விசை, துகள்களின் திணிவுகளின் பெருக்குத்தொகை விகிதாசாரமாகவும், துகள்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தின் கிரெப்புக்கு எதிர் விகிதாசாரமாகவும் உள்ளது. மீத விதியின் உண்மையும் கண் கூடாகக் காணக்கூடியதாகும்.

விளக்கம்—முதல் விதி: முதல் விதி பொருள்களின் சக்தியற்ற தன்மையை விளக்குகிறது. அதாவது பொருள் தனது சக்தியினால் ஒவ்வற்ற நிலையையோ, கியக்கத்தையோ மாற்ற வியலாது. அதாவது, வெளிப்புறத்திலிருந்து விசையின்வாழ்ந்தாகும், அதன் நிலைமையில் மாறுதலாகும். எனவே, பொருள்களின் கியக்க மாறுதலுக்கு வெளி விசையே காரணமாகும். விசையின் வரையறைப்படி பொருளின் ஒவ்வற்ற நிலையையோ, சீரான கியக்கத்தையோ மாற்றும் சக்தியோ அல்லது மாற்றக்கூடிய சக்தியோ உடையதாயிருக்கும்.

கிரண்டாவது விதிமுதற்பாகம்: கிரண்டாவது விதியின் முதற்பாகம் விசையின் அவருகே வரையறுத்தல் கூறுகிறது. மேலும் கியக்கவியலின் அடிப்படையில் சமன்பாட்டை நிர்வகித்துகிறது.

P அவருள்ள ஒரு விசை ' m ' திணிவுள்ள ஒரு பொருளில் ' f ' முடுக்கத்தை உண்டாக்கிறது

P உத்தத்தின் மாறுதலின் வீதம்

அ. ' m ' V -ன் மாறுதலின் வீதம்

அ. ' m ' \times (V -ன் மாறுதலின் வீதம்)

அ. $m \times f$

$\therefore P = k.m.f$ [கிக்கு k ஒரு மாறியாகும்]

கிரண்டாவது விசையின் அவகை, $k=1$ என்றாகும்படித் தேர்ந்தெடுப்போம்.

அதாவது $f=1$, $m=1$ என்றும்போது $P=1$ என்றால் $k=1$ ஆகிறது.

எனவே, விசை அவரு திணியின்மேல் செலுத்தப்படும்போது அவரு முடுக்கம் உண்டாகுமாறும், அந்த விசையை அவருவிசை யெனலாம்.

எனவே அடிப்படையில் சமன்பாடு $P = mf$ ஆகும்.

குறிப்பு: தினியின் அங்கம் ஒரு பவண்டாகவும், தூதம், தேரம் கிணவலின் அங்குகளை மூன்றைய அடி, வீதரடி என்னும் கொண்டாக, விசை அங்கம் ஒரு பவண்டாகும்.

தனியின் அமைத ஒரு கிராமமாகவும், தூரம் தேரம் கிணவகளின் அங்குலகீர் மூன்றைய செ.மீ., விதாடி எளிதும் கொண்டார், விசை அல்ல ஒரு டைன் (Dyne) அகும்.

குறிப்பு: பயிர்வரும் கட்டளும் ஒரு தீர்தர அளவுகளாகும். ஏனெனில், அவையளவின் மதிப்புகள் எல்லா மீட்டர்களிலும் ஒரே மாதிரியாக இருக்கும். பயிரின் வர்ப்பச் சத்தியைக் காண்கப்படாது.

திரைப்படம் பாகம் : மிகச்சிறந்த யாழ்ப்பாணப் திரைப்படமாக இருக்கவேண்டி இதனால் தெளிவாகிறது. மிகத் துல்லியமான பொருள் சரக்குக் கொடுத்த எல்லாம்.

அதாவது, ஒரு பொருளின் மேலும் விசை இயங்கும்போது அது தனது திசையிலேயே உத்தத்தின் மூலதனம் உண்டாக்குகிறது. பொருள் ஒவ்வற்ற நிலையில் இருந்தாலும், வேறொரு திசையில் சீராக இயங்கிக்கொண்டிருந்தாலும், அங்கு மற்ற விசைகளால் தாக்கப் பட்டிருந்தாலும், உத்தத்தின் மூலதனம் விசையின் திசையிலேயே அடையும். அதாவது ஒரு பொருள் பல விசைகளால் தாக்கப்படும் போது, ஒவ்வொரு விசையும் தனது திசையிலேயே மற்ற விசைகளின் இருக்கையைப் பொருட்படுத்தாமல் முடுக்கத்தை உண்டாக்கும். எனவே, பொருளின் உண்மையான முடுக்கம் எவ்வாறு முடுக்கக்கூலி விசையே முடுக்கமாயும்.

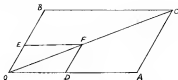
வினா-கனகசபைத் துணைக்கரு விநி தேசநாயகம்

OA, OB என்ற நேர்க்கோடுகள், O என்ற புள்ளியில் அமைந்திருக்கும் துளியிழை செயல்படும் கிராஃடு விசைகளின் அளவைகளையும் திசைகளையும் குறித்தால், கிற்ற விசைகளின் விளைவு, OACB என்ற கிளைகாத்தின் OC என்ற முனைவிட்டதால் அளவிலும் திசையிலும் குறிக்கப்படும்.

௩. எந்த திணிவுள்ள ஒரு துகள் 10^{-3} -லில் கிடுக்கட்டும். அதன் மெல் செய்கிறதும் கிடைந்து விசைகள் P , Q என்பவை அளவு, திசை விசைகள் கிடைக்கும் குதிக்கும்படி OA , OB என்ற நேர்க்கோட்டால் குதிக்கப்படவேண்டும்.

நிபுட்டனின் கிரண்டாவது விதிப்படி, இந்த கீரு விசைகளும் தளது திசையிலேயே முடுக்கங்களை உண்டாக்கும். அவையினை f, f' என்று கொண்டால்,

$P = mf$, $Q = mf'$ எனலாம்.



படம் 38.

OA, OB என்ற நேர்க்கோடுகளில் முறையே D, E என்ற புள்ளிகளைக் கொண்டு OD, OE என்பவை f, f' என்ற முடுக்கங்களைக் குறிக்கும்படிச் செய்யு.

$\therefore OD = f, OE = f'$ ஆகின்றன. ODEF என்ற கிரையகர்த்தைப் பூர்த்தி செய்யு.

$$\frac{OA}{OB} = \frac{m \cdot f}{m \cdot f'}$$

$$= \frac{f}{f'}$$

$$\frac{OD}{OE} = \frac{f}{f'}$$

$$\therefore \frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OE}$$

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OE}$$

$$= \frac{AC}{DF} \quad [\because OB = AC, OE = DF]$$

மேலும் DF, AC-க்கு கிரையகர்த்தை உள்ளது.

$\therefore OFC$ -என்பது ஒரு நேர்க்கோடாகும்.

$$\therefore \frac{OC}{OF} = \frac{OA}{OD}$$

$$= \frac{m \cdot f}{f}$$

$$= m$$

$$\therefore OC = mOF$$

முடுக்கத்தில் வினைகா விதிப்படி OF, f, f' என்பவைகளின் வினையு முடுக்கமான f'' க்குக் குறிக்கும்.

$$\therefore OG = m \cdot f''$$

= வினையு முடுக்கத்தை உண்டாக்கும் விசை.

$\therefore OG$ என்பது வினையு விசையை அளவு, திசை நிலைகளில் கிரகணடபுக் குறிக்கும்படி அணையும்.

ஒன்றாவது விதி: பொருள்களின் தொகுதியின் கூறு பாகக் களிடையே உண்டாகும் செயல் அமைவானுடைய துகளுக்கிடையேயுள்ள கவுச்சியினாலோ அல்லது தொடர்பினாலோ உண்டாகும். இந்தச் செயல், பொருள்களின் தொகுதி மொத்தத்திற்கும் உண்ட உத்தத்தைப் பாதிக்காது. ஏனெனில் A, B என்ற இரு பொருள்கள் ஒன்றுக் கொன்று செயல்பட்டால் B -ன் மேல் A -ன் எதிர்வினை A -ன் மேல் B -ன் எதிர்வினைக்குச் சமமாகவும், எதிர்நிலையிலும் அமையும். எனவே, வினையும் எதிர்வினையும் பொருள்களின் மீது சமமாக, ஆனால் எதிர் திசையில் இருக்கும்படி உத்தங்களை உண்டாக்கும். எனவே, ஒரு குறிப்பிட்ட திசையில் பொருள்களின் மேலுள்ள மொத்த உத்தம் பாதிக்கப்படாது. இதையே நேர்கோட்டு உத்தக்காப்பு எனலாம்.

நேர்கோட்டு உத்தக்காப்பு விதி (Law of conservation of linear momentum): ஒன்றையொன்று கவுச்சிக்கும் அல்லது தாக்கும் துகள்களின் தொகுதியில், கொடுக்கப்பட்ட திசையில் நேர்கோட்டு உத்தம், அத்தத் திசையில் வெகிவிசை ஒன்றுமில்லா விட்டால், மாறுமலிருக்கும்.

குறிப்பு: $P = m \cdot f$ என்ற சமன்பாட்டில், f என்ற முடுக்கமும் P என்ற விசையும் மாநிலபாகவோ, மாநிலபாகவோ இருக்கலாம், நாம் இக்கு அவைகளை மாநிலபாகக் கொண்டு நேர்கோட்டில் துகளின் நியக்கத்தைக் கவனிப்போம்.

நிறை (Weight) வரையறை: ஒரு பொருளின் நிறை அதைப் பூமி ஈர்க்க அவசியமான விசையாகும். பூமியின் ஈர்ப்புச் சக்தியினால் எல்லாப் பொருள்களும் 'g' என்ற முடுக்கத்துடன் கிழுகப்படுகின்றன. ஒரு பொருளின் திணிவை 'm' என்றும் நிறையை 'w' என்றும் கொண்டால் $w = m \cdot g$, என்றாகும்.

1 பவுண்டு திணியின் நிறை = 32 பவுண்டுகளாகும்.

அதேபோல் 1 கிராம் திணியின் நிறை = 981 மடங்குகளாகும்.

எனவே பவுண்ட் நிறை, கிராம் நிறை நிலைகளை மூன்றையே F.P.S., C.G.S. மூறைகளில் பூமியின் ஈர்ப்புச் சக்தியினால் வினையும் விசையின் அளவு எனலாம்.

1 பவுண்டி நிறை = 9 பவுண்டுகள் = 32 பவுண்டுகள்.

1 கிராம் நிறை = 9 டைன்கள் = 981 டைன்கள்.

தினரிவிற்கும் நிறைக்கும் உள்ள வித்தியாசம்: ஒரு பொருளின் தினரிவு என்பது அந்தப் பொருளிலுள்ள துகள்களின் அளவைப் பொறுத்ததாகும். தினரிவுக்கு அளவு ஒன்றுதான் உண்டு.

நிறையென்பது பொருளைப் பூமி ஈர்க்கும் விசையைப் பொறுத்தது. அதனால், பூமியின் ஈர்ப்புச் சக்தியினால் உண்டாகும் முடுக்கம் 'g' என்றும், நிறை = தினரிவு $\times g$ ஆகிறது. மிடத்துக்கு மிடம் 'g' -ன் அளவு மாறாதால், பொருளின் நிறையும் மிடத்துக்கு மிடம் மாறுமென்பது தெளிவு. $g=0$ என்ற மிடத்துக்கு 'n' தினரிவுள்ள ஒரு பொருளை எடுத்துச்செல்ல முடிந்தால் அங்கு அதன் நிறை '0' ஆகும்.

எனினும் ஒரே மிடத்தில் m_1, m_2 என்ற தினரிவுள்ள பொருள்களின் நிறைகள் முறையே m_1, m_2 என்றும்

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_1 g}{m_2 g} = \frac{m_1}{m_2} \text{ ஆகின்றது.}$$

அதாவது ஒரே மிடத்தில் பொருள்களின் நிறைகள் அவைகளின் தினரிவுகளின் விகிதத்தில் இருக்கும்.

உராய்வு: துகள் அமர்த்திருக்கும் மேற்பரப்பு மூக்கால்வாசி வழவழப்பு கிருக்குமெனக் கொள்வது மரபு. அதாவது துகளுக்குத் தகு அது அமர்த்திருக்கும் மேற்பரப்புக்குமிடையே, மேற்பரப்பின் வழியிலேயே துகளின் நியக்கத்தைத் தடை செய்யும்படியாக ஒரு விசை கிடையாது. ஆனால், மேற்பரப்பின்மேல் அதன் வழியிலேயே ஒரு துகள் நியங்கும்போது, உராய்வு என்ற ஒரு விசை துகளின் நியக்கத்தைத் தடை செய்கிறது.

செய்முறைகளின்படி பார்க்கும்போது, ஒரு பொருள் மற்ருரு பொருளின்கீழே நியங்கும்போது ஓர்படும் உராய்வு என்ற விசைக்கும் கிரண்டு மேற்பரப்புகளுக்கிடையே உள்ள நேர்க்குத்து எதிர்விசைக்கும் ஒரு மாறிலி விகிதம் உண்டு என்பது தெளிவாகிறது. அந்த மாறிலி விகிதத்தின் மதிப்பு கிரண்டு மேற்பரப்புகளின் தன்மைகளைப் பொறுத்தது. அந்த விகிதத்தை நியக்கவியலின் உராய்வு செழு எனவும் அதை 'μ' என்ற எழுத்தால் குறிப்பிடுவதும் மரபு.

F என்பதை உராய்வுவிசை எனவும், R என்பதை நேர்க்குத்து எதிர்விசை எனவும் கொண்டால்,

$$F = \mu R.$$

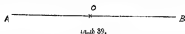
குறிப்பு: விசை திசையிலுள்ள ஒரு மேற்பரப்பின்மேல் 'n' திணிவுள்ள ஒரு துகள் இயங்கினால்,

$$R = mg, F = \mu mg \text{ என்றாகிறது.}$$

அதேபோல α சாய்வு கோணமுள்ள ஒரு சாய்தளத்தின்மேல் துகள் இயங்கினால்,

$$R = mg \cos \alpha, F = \mu mg \cos \alpha \text{ என்றாகிறது.}$$

தேற்றம் 1: வெளி மாநிலி விசையினால் செயல்பட்டு, உராய்வுடைய விசை திசையிலுள்ள சமதளத்தின்மேல் இயங்கும் துகள்:



துகளின் திணிவு m என்றும், வெளி மாநிலிவிசை P என்றும், μ உராய்வு கெழு என்றும் கொள்ளுவோம். AB திடைதிசையிலுள்ள சமதளமாதலால் O என்ற துருவத்து நினைத்திசையில் இயக்கம் கிடைக்காது.

$$\therefore R = mg$$

$$F = \mu R \text{ ஆகும்.}$$

$$AB \text{ திசையில் விசையு விசை } = P - F$$

$$= P - \mu R \text{ ஆகிறது}$$

$$= P - \mu mg //$$

$$AB \text{ திசையில் 'O'-ன் முடுக்கம் 'f' என்றால்}$$

$$m \cdot f = P - \mu mg$$

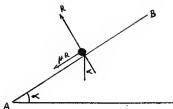
$$\therefore f = \frac{P}{m} - \mu g \text{ ஆகும்.}$$

தேற்றம் 2: மாநிலி விசையினால் செயல்பட்டு உராய்வுடைய சாய்தளத்தின்மேல் இயங்கும் துகள்.

' α ' கோணமுள்ள சாய்தளத்தின்மேல் m திணிவுள்ள துகளை P என்ற மாநிலிவிசை இழுக்கட்டும். அப்பொழுது F என்ற உராய்வு விசை எதிர்த்திசையில் துகளின் போக்கைத் தடைசெய்ய முயலும். துகளின் நிறை ' mg ' என்பதற்குச் சாய்தளத்தின் நேர்க்குத்துத் திசையில் $mg \cos \alpha$ என்ற கூடும் அதன் திசையில் $mg \sin \alpha$ என்ற கூடும் உச்சுள்ள.

சாய்தளத்தின் நேர்க்குத்துத் திசையில் துருவத்து இயக்கவியலில் யாதலால்,

$$R = mg \cos \alpha$$



படம் 40.

தூசு சாய்நனத்தின்மேல் இயங்குவதற்குரிய விசையின் விளைவு
 $= P - \mu R - mg \sin \alpha = P - \mu mg \cos \alpha - mg \sin \alpha$.

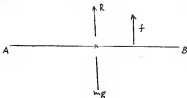
தூசு இயக்கத்திற்குரிய முடுக்கம் ' f ' என்றால்

$$mf = P - \mu mg \cos \alpha - mg \sin \alpha. \therefore f = \frac{P}{m} - \mu g \cos \alpha - g \sin \alpha$$

ஆகும். தூசு சாய்நனத்தின்மேல் நோக்கி செல்வதற்குப் பதில், கீழ்நோக்கி நகர்த்தாக வப்போது அதன் முடுக்கம் $f = \frac{P}{m} - \mu g \cos \alpha + g \sin \alpha$ என்று ஆகும்.

தேற்றம் 3: நிலைநிலையில் இயங்கும் கிடைசமநனத்தின் மேலிருக்கும் பொருளின் அழுத்தம் :

AB என்ற கிடைசமநனம் ' f ' என்ற சீரான முடுக்கத்துடன் நிலைநிலையில் நகரட்டும். அதன்மேல் ' m ' நிறமியின் பொருள் இருப்பதாகக் கொள்வது.



படம் 41.

பொருளின் விசையுவிசை நிலைநிலையில் $R = mg$. எனவே $mf = R - mg$. $\therefore R = m(f + g)$ (1)

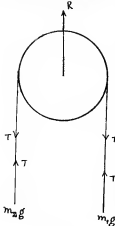
ஆனால், கிடைசமதான் நிலைநிலையில் மேலே செல்வதற்குப் பதில் கீழ்தோக்கி நகர்த்தாக

விசையு விசை = $mg - R_1$ [R_1 என்பது இப்போதுள்ள எதிர்விசை]

$$\therefore mf = mg - R_1$$

$$\therefore R_1 = m(g - f)$$
(2)

(1) சமன்பாட்டிலிருந்து $R > mg$ என்றும் (2) சமன்பாட்டிலிருந்து $R_1 < mg$ என்றும் அறிவிக்கும். எனவே, மேல்தோக்கிச் செல்லும் சமதளத்தின்மேல் அமர்த்தி இருக்கும் மனிதன் தனது எடைமையிட அதிகமாகத் தான் இருப்பதாகவும், கீழ்தோக்கிச் செல்லும்போது, குறைந்திருப்பதாகவும் எண்ணுகிறான்.



படம் 42.

தேற்றம் 4: m_1, m_2 திணிவுள்ள இரு துகள்களை இரு முனைகளிலும் கட்டியிருக்கும் மேலான திட்டமியலாத தூக், இமேலான உராய்வுற்ற மாறுத கட்டுமேல் நகர்த்தாக, தொகுதியின் விசையு நியுக்கத்தையும் தூலின் இருவிசை இவைகையையும் கண்டு பிடிக்க.

தூக் இமேலாக, இருப்பதாக அதன் இருவிசை கட்டுமேல் இரு பக்கங்களிலும் ஒரே மாதிரியாக இருக்குமெனக் கொள்வது மரபு. அத்துடன் கட்டுமேல் இமேலாகவும் உராய்வுற்ற இருப்பதாக, தூலின் பாகங்கள் ஒரு கட்டுமேல் ஒரு பக்கத்திலிருந்து மற்றொரு பக்கத்துக்குச் செல்லும்போது அதன் இருவிசை மாறாமலிருக்கும். எனவே, மாறுத இருவிசை 'T' எனக் கொள்ளுவோம்.

$m_1 > m_2$ ஆகட்டும். மேலும் தூக் திட்டமியலாது. ஆதலால் ' m_1 ' திணியின் திசையேனம் = ' m_2 ' திணியின் திசையேனம்.

எனவே, ' m_1 '-ன் கீழ்தொக்கிய முடுக்கம், m_2 -ன் மேல்நோக்கிய முடுக்கத்துக்குச் சமமாகும். அதற்கு முடுக்கத்தின் சம அளவை ' f ' எனப்போம்.

' m_1 ' திசையில் செலுத்தப்படும் விசைகள், கீழ்முக திசை $m_1 g$ -ம், மேல்முக தூயின் இழுவிசையும் ஆகும்.

$$\therefore m_1 \text{ கீழ் நகரும்போது} \\ m_1 f = m_1 g - T \quad \dots\dots(1)$$

அப்போது m_2 மேல் நகருமாறாக

$$m_2 f = T - m_2 g \quad \dots\dots(2)$$

$$\therefore (1)+(2) \\ (m_1 + m_2)f = g(m_1 - m_2) \\ \therefore f = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$m_1(1) - m_2(2) \\ 0 = 2m_1 m_2 g - (m_1 + m_2)T \\ \therefore T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

இப்போது கண்ட ' f ' முடுக்கம் மாநிலியாதலால், தூயின் திசை வேகம், அதன் மேலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளி ' t ' நேரத்திற் நகரும் தூரம் கிடைக்கக் கூடியது.

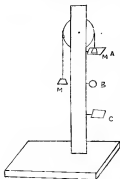
அப்படியிமேல் செயற்படு விசை = $T + T$

$$R = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \text{ ஆகும்.}$$

அட்டவுட் இயந்திரம் (Atwood's Machine): இரண்டான அப்பி யிசுமேல் செல்லும் இரண்டான தூயின் இரு முனைகளிலும் சம திணிவு கள் ' M ', ஈர்ப்பவைகள் கட்டப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்ளுவோம். அப்பியின் அச்ச விடைநிலையில் இருந்து கற்றுவதால் கட்டுக்கு உராய்வு இல்லாமெனக் கொள்க.

A என்ற தட்டின் மேல் ' M ' திணிவு இருக்கும்போது அதன் மேல் ' m ' திணிவுள்ள ஒரு சிறு பொருளை வைத்துத் தட்டை நகர்த்த வும். ' $M+m$ ' என்ற திணிவிலுள்ள கீழே நகரும் பொருள் தொகுதி B -லுள்ள விரையத்தால் சிறப்பொருள் கட்டும் தீக்கப்பட்டு ' M '

திணிவு மட்டும் இன்னும் கீழே நகர்த்து C தட்டை அதையும், A -விருந்து B வரை தொகுதியின் முடுக்கம் $\frac{mg}{2M+m}$ -ஆகிறது.



படம் 43.

$AB = h_1$ என்றால், தொகுதி B இன் விடையும்போது அதன் திசை வேகம் $V^2 = 2 \frac{mg}{2M+m} \cdot h_1$

$BC = h_2$ என்றால், B -விருந்து C வரை ' M ' திணிவு மட்டும் செல்ல நேரம் $t = \frac{h_2}{V}$ [தூரின் இரு பக்கங்களிலும் சமத்திணிவு இருப்பதால், B -விருந்து, M திணிவு ஒரே சீரான திசைவேகத்துடன் நகரும்.]

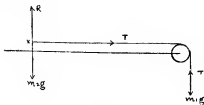
$$\therefore \frac{h_2}{t^2} = \frac{2mg \cdot h_1}{2M+m}$$

$$\therefore g = \frac{h_2^2 (2M+m)}{2mh_1 t^2}$$

குறிப்பு: இந்தச் செயல்முறையின்மூலம் ஒர் மிடத்தின் g இன் கண்டுபிடிக்கலா மென்றாலும், ' g '-ன் மதிப்புச் சரியாக இருக்குமெனச் சொல்லுவது இயலாது. அதற்கான காரணங்கள்:

- (1) கம்பியின் மேல் தூள் நழுவுவதால்.
- (2) உராய்வை ஒரேயடியாக நீக்க முடியாது.
- (3) கம்பியின் திணிவைக் கவனிக்காமலிருப்பது சரியன்றா.
- (4) காத்தின் நடுக்குக்கத்தியை ஒரேயடியாக நீக்குவதும் சரியன்றா.

தேற்றம் 6: வழுவுறுப்பான கிடைதிசையிலுள்ள ஒரு மேனது யின் விளிம்பிலுள்ள இமேரான உராய்வற்ற கம்பியின் மேலாகச் செல்லும் இமேரான நீட்டவியலாத ஒரு தூரின் இருமுனைகளிலும் m_1 , m_2 என்ற திணிவுள்ள இரு துகள்கள் இருப்பதாகக் கொள்க. m_2 திணிவு மேனதுவிளிம்பில் இருப்பதாகவும், m_1 திணிவு தொங்கிக் கொண்டிருப்பதாகவும் கொள்க. விசைவு இயக்கத்தையும் தூரின் இரு விசையையும் கண்டுபிடிக்க.



படம் 44.

தூர் இயோசனை கிருப்பதாலும் கப்பி இயோசனையும் உராய்வற்றதாலும் உள்வதாலும் தூரின் கிருவினை எங்கும் ஒரு மாதிரியாக கிருக்கும். தூர் திட்டவாயாதபடியாக, மேலனுவின்கீழே 'ம₂'-ன் திசையெதிரும் முடுக்கமும் முறையே தோங்கும் ம₁-ன் திசையெதிர்த்தும் முடுக்கத்திற்கும் சமமாகும்.

அவைகளின் சம அளவுள்ள முடுக்கம் 'f' என்று சொல்லுவோம்.

ம₁-ன் மேல் செலுத்தப்படும் விசைகள் கீழ்க்குமான ம₂g என்ற அதன் திசையும், மேல்முக்கமான T என்ற தூரின் கிருவினையுமாகும். எனவே கீழ்க்கு விசை = ம₁g - T.

$$\therefore m_1 f = m_1 g - T \quad \dots\dots(1)$$

மேலனுக்கு நேர்க்குத்துத் திசையில் ம₂-க்கு நியக்கையிலையாதலால்

$$R = m_2 g \quad \dots\dots(2)$$

கிடைதிகையில் ம₂-ன் நியக்கத்திற்கு, T என்ற கிருவினை மட்டும் அரணமாதலால்

$$m_2 f = T \quad \dots\dots(3)$$

$$(1) + (3)$$

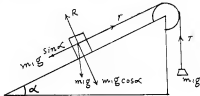
$$f(m_1 + m_2) = m_1 g$$

$$\therefore f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot g$$

$$\therefore T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot g$$

தேற்றம் 6: கிடைதிகைக்கு 'உ' கோணத்திலுள்ள சாய்தளத்தின் உச்சியிலுள்ள இயோசனை உராய்வற்ற கப்பியின்கீழேயே செல்லும்

இமேசான திட்டவியலாத தூரின் இரு முனைகளிலும் m_1 , m_2 திணிவுள்ள இரு துகள்கள் உள்ளன. m_1 என்ற துகள் தடங்கலின்மீது நொக்கிக்கொண்டிருக்கிறது. m_2 என்ற துகள் சாய்தளத்தின் மேலுள்ள அப்போது அதைச் சேர்க்கும் தூர சாய்தளத்திற்கு இணையாக உள்ளது. m_1 துகள் கீழே நகர்த்தாகி, விசைவு இயக்கத்தை புழி தூரின் கீழேவிசைவையும் அடைபடுகிறது.



படம் 45.

கப்பி இமேசாவும் உராய்வற்றும் இருப்பதாலும் தூர இயேசைவும், திட்டவியலாததாலும் இருப்பதாலும் தூரின் கீழேவிசை அதிதூரன் எங்குப் புள்ளிகளிலும் ஒரே அளவில் இருக்கும். மேலும் m_2 திணிவின் வேகமும், முடுக்கமும் m_1 திணிவின் வேகத்திற்கும் முடுக்கத்திற்கும் சமமாக இருக்கும்.

சீரான முடுக்கத்தை ' f ' எனக் கொள்க. m_2 திணிவின் விசைவு விசை = $m_2g - T$.

$$\therefore m_2 f = m_2 g - T \quad \dots\dots(1)$$

m_1 திணிவைப் பொறுத்தவரை சாய்தளத்திற்கு நேர்க்குத்துத் திசையில் இயக்கவியல்வாதாகி

$$R = m_1 g \cos \alpha \quad \dots\dots(2)$$

சாய்தளத்தின் போக்கில் விசைவு விசை

$$T - m_1 g \sin \alpha \text{ ஆகிறது.}$$

$$\therefore m_1 f = T - m_1 g \sin \alpha \quad \dots\dots(3)$$

$$(1)+(2) \quad (m_2 + m_1) f = g[m_2 - m_1 \sin \alpha]$$

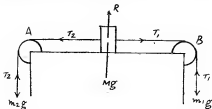
$$f = \frac{m_2 - m_1 \sin \alpha}{m_1 + m_2} \cdot g \text{ ஆகிறது.}$$

$$m_2(1) - m_2(2)$$

$$0 = T(m_1 + m_2) - m_1 m_2 g (1 + \sin \alpha)$$

$$\therefore T = \frac{m_1 m_2 (1 + \sin \alpha)}{m_1 + m_2} \cdot g.$$

தேற்றம் 7: ஒரு மேனையில் இரு விளிம்புகளிலுமுள்ள இரு இலோசை உராய்வற்ற எப்போதின் மேலாகச் செல்லும் இலோசை நீட்டவியலாத தூள் 'M' திணிவுள்ள ஒரு பொருளை மேனையிலிருத்தி, அதன் இரு முனைகளிலும் m_1 , m_2 திணிவுள்ள இரு பொருள்கள் தடக்க விளநித் தொங்குவின்றன. மொத்தத் தொகுதியின் இயக்கத்தையும், தூளின் இழுவிசைகளையும் கண்டுபிடிக்க.



படம் 46.

இரு எப்போதும் இலோசைவும் உராய்வற்றும் இருப்பதால், அதன் மேல் செல்லும் தூளின் இழுவிசைகளும் எப்போதின் இரு பக்கங்களிலும் ஒரே அளவாகியுக்கும்.

A எப்போதில் T_2 இழுவிசையும், B எப்போதில் T_1 இழுவிசையும் இருப்பதாகக் கொள்க.

தூள் இலோசைவும், நீட்ட வியலாததாகவும் இருப்பதால் m_1 திணிவின் முடுக்கம் m_2 -ன் முடுக்கத்திற்குச் சமமாகும்.

m_1 திணிவு கீழ்நுழைவாக f முடுக்கத்துடன் செல்வதாகக் கொண்டால், தொகுதியின் விளைவு விசை திசைதிசையில் $m_1 g - m_2 g$ ஆகிறது.

[M திணிவுக்கு மேனையின் நேர்க்குத்துத் திசையில் இயக்கமில்லை யாதலால் $R = Mg$ -ஆகும்.]

$$m_1 \text{ திணிவுக்கு } m_1 f = m_1 g - T_1$$

$$m_2 \text{ திணிவுக்கு } m_2 f = T_2 - m_2 g$$

$$M \text{ திணிவுக்கு } M f = T_1 - T_2$$

$$\therefore (M + m_1 + m_2) f = (m_1 - m_2) g$$

$$\therefore f = \frac{m_1 - m_2}{M + m_1 + m_2} g.$$

m_1 திணிவின் நிலைநிலையில் நியூட்டனின் இயக்கத்தைக் கவனிக்க

$$m_1 f = m_1 g - T_1$$

$$\therefore T_1 = m_1 [g - f]$$

$$= m_1 \left[g - \frac{(m_1 - m_2)}{M + m_1 + m_2} g \right]$$

$$= \frac{m_1 [M + 2m_2]}{M + m_1 + m_2} g.$$

அதேபோல் ' m_2 ' திணிவின் நிலைநிலை நியூட்டனின் நோக்கின்

$$m_2 f = T_2 - m_2 g$$

$$\therefore T_2 = m_2 [f + g]$$

$$= m_2 \left[\frac{m_1 - m_2}{M + m_1 + m_2} g + g \right]$$

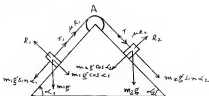
$$= \frac{m_2 [M + 2m_1]}{M + m_1 + m_2} g.$$

குறிப்பு 8: α_1 , α_2 என்ற கோணங்களைக் கிடைதலைபட்டின் உண்டாக் கும் திரு உராய்வுபட்ட சாய்தளங்களை A-ல் சந்திக்கட்டும். அதன் மேலுள்ள இயைச்சாலை உராய்வற்ற கப்பியின் வழியாகச் செல்லும் இயைச்சாலை திட்ட இயைச்சாலை தூசில், ஒரு சமதளத்தின் மேலுள்ள m_1 திணிவை ஒரு முனையிலும் மற்றொரு சமதளத்தின் மேலுள்ள m_2 திணிவை மற்றொரு முனையிலும் கொண்டிருக்கட்டும். ' m_1 ' திணிவுகள் பொருள் சாய்தளத்தின்மேல், கீழ்நோக்கி நகரட்டும். அப்போது ஏற்படும் முடுக்கம், தூசின் இழுவையைக் கிடைக்கக் கண்டிடுக.

m_1 திணிவு, m_2 திணிவு இயைச்சாலைக்கு அவைகள் அமர்த்திருக்கும் சாய்தளங்களின் நேர்சூழ்த்த திசையில் நியூட்டனியல் சாய்தளங்கள்

$$R_1 = m_1 g \cos \alpha_1 \quad \dots (1)$$

$$R_2 = m_2 g \cos \alpha_2 \quad \dots (2)$$



படம் 47.

m_1 திணிவு சிற்றேறாக்கி நகருவதால் அப்போதுள்ள வினைவு விசை $m_1 g \sin \alpha_1 - T - \mu R_1$ ஆகும்.

$$\therefore m_1 f = m_1 g \sin \alpha_1 - T - \mu R_1$$

$$= m_1 g \sin \alpha_1 - T - \mu (m_1 g \cos \alpha_1) \quad \dots\dots(3)$$

m_2 திணிவு சிற்றேறாக்கி நகருவதால், m_2 திணிவு மேல்ேறாக்கி நகருகிறது. அதனால் μR_2 உதவியு சிற்றேறாக்கிய திசையில் இயங்கும். எனவே வினைவு விசை = $T - m_2 g \sin \alpha_2 - \mu R_2$

$$= T - m_2 g \sin \alpha_2 - \mu m_2 g \cos \alpha_2$$

$$\text{ஆதலால் } m_2 f = T - m_2 g \sin \alpha_2 - \mu m_2 g \cos \alpha_2 \quad \dots\dots(4)$$

(3)+(4)

$$f(m_1 + m_2) = g [m_1 (\sin \alpha_1 - \mu \cos \alpha_1) - m_2 (\sin \alpha_2 + \mu \cos \alpha_2)]$$

$$\therefore f = \frac{g}{m_1 + m_2} [m_1 (\sin \alpha_1 - \mu \cos \alpha_1) - m_2 (\sin \alpha_2 + \mu \cos \alpha_2)]$$

$m_2(3) - m_2(4)$

$$0 = -T(m_1 + m_2) + m_1 m_2 g \sin \alpha_1 - \mu m_1 m_2 g \cos \alpha_1$$

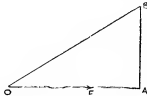
$$+ m_1 m_2 g \sin \alpha_2 + \mu m_1 m_2 g \cos \alpha_2$$

$$T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} [(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) + \mu (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)]$$

வேலை (Work): ஒரு பொருளின்மேல் செயல்படும் விசை செயல்பட ஆரம்பிக்கும் புள்ளியிலிருந்து துவக்கி நகர்த்தினால், பொருளின்மேல் வேலை நடப்பதாகக் கொள்ளலாம்.

விசை மாறிவெனாலும், விசை செயல்படும் வேலை, விசையின் அளவு, செயல்பட ஆரம்பிக்கும் புள்ளியிலிருந்து துவக்கி விசையின் திசையில் நகரும் தூரம் இவைகளின் பெருக்கத்தே தொகைவாகும்.

குறிப்பு: வேலை ஓர் அளவு அலகியமாகும். F எனும் விசை O -ல் செயல்பட ஆரம்பிக்கும் போது F , O -ல் உள்ள தூலை B -க்கு மாற்றினால், அந்தத் தூரம், அதாவது OB , F -ன் திசையில் $OB \cos \angle AOB$



படம் 48.

$$\begin{aligned} \therefore \text{விசை செயல்பட வேலை} &= F \cdot OB \cos \angle AOB \\ &= [F \cos \angle AOB] OB \\ &= [\text{பொருள் தரும் திசையில் விசை} \\ &\quad \text{யின் கூறு}] \times \text{பொருள் தரும் தூரம்.} \end{aligned}$$

விசை ஒரு மாநிலியாகும் போது, விசை செயல்பட ஆரம்பப் புள்ளி விசையின் திசையில் ds தூரம் தகருவதாகக் கொண்டால்

$$\text{விசை செயல்பட வேலை} = \int_{s_1}^{s_2} F \cdot ds$$

வேலையின் அலகுகள்: ஒரு பவுண்டல் விசை, அதன் செயல்படு புள்ளியை விசையின் திசையில் 1 அடி தூரம் நகர்த்தினால், கிடைக்கும் வேலை அடிது வேலியாகும். இதை அடி பவுண்டல் எனலாம். (F.P.S. முறையில்). C.G.S. முறையில் 1 டைன் விசை செயல்படு புள்ளியை விசையின் திசையில் 1 செ.மீ. நகர்த்தும்போது விளைபு வேலை அடிது வேலியாகும். இதை எர்க் (erg) எனலாம்.

$$[10^7 \text{ எர்க்குகள்} = 1 \text{ ஜூல்}]$$

நட்டவயில் தூலின் இழுவிசை (Tension of an Elastic string)

வரையறை: செம்புதாளை எவ்வளவு தூலின் இழுவிசை, அதாவது நீளத்திற்குமேல் இழுக்கப்படும் தூரத்திற்கு வீதம் மாறும்.

விசைக் கண்டறித்த பெயரில் விஞ்ஞானி ஹுக் கூறியதாவது :
தூவின் சாதாரண நீளம் a என்றும் நீட்டப்பட்டதின் அதன் நீளம்
 x என்றும் கொண்டால், தூவின் விழுவிசை =

$$= \frac{\lambda (x-a)}{a} \text{ என்றாகும்.}$$

λ = தூவின் நீட்டக்கூடியதும் குணகம் எனக் கூறலாம்.

நீட்டக்கூடிய தூலை துருக்கும்போது பெரியும் சேலியின் அளவு

' a ' தூவின் சாதாரண நீளமாகவும், அந்த தூலை ' b ' நீளத்தி
லிருந்து ' c ' நீளத்திற்கு நீட்டுவதாகக் கொள்க.

நீட்டப்பட்ட நீளம் ' x ' என்றாகும்

$$T = \frac{\lambda}{a} (x-a)$$

x -ல் மாறுதல் Δx ஆனால், இந்த மாறுதலாக ஏற்படும் வேலியின்
அளவு = $T \cdot \Delta x$.

$$\therefore \text{மொத்த வேலை} = \sum_b^c T \Delta x$$

$$= \int_b^c T dx$$

$$= \frac{\lambda}{a} \int_b^c (x-a) dx$$

$$= \frac{\lambda}{2a} \left[(x-a)^2 \right]_b^c$$

$$= \frac{\lambda}{2a} [(c-a)^2 - (b-a)^2]$$

$$= \frac{\lambda}{2a} [(b+c-2a)(c-b)]$$

$$= \frac{1}{2} [(c-b) \left[\frac{\lambda}{a} \{ (b-a) + (c-a) \} \right]]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda}{a} (b-a) + \frac{\lambda}{a} (c-a) \right] \times (c-b)$$

$$= \frac{[\text{கண்டறி விழுவிசை} + \text{முதல் விழுவிசை}]}{2} \times [\text{நீட்டிய தூலை}]$$

திறன் (Power): வேலை செய்யக்கூடிய விகிதத்தைத் திறன் என்கிறோம்.

F.P.S. முறையில் குதிரைத் திறன் என்பது ஒர் அலகாகும். இதை H. P. என்ற குறிக்கலாம்.

550 அடி பவுண்டு வேலையை 1 விநாடியில் செய்யும் திறன் குதிரைத் திறன் ஆகும்.

C.G.S. முறையில் 10^7 எர்க்குசு = 1 ஜூல் வேலையை 1 விநாடியில் செய்யும் திறனை ஒரு ஹப் என்றும், அதைத் திறனின்-ஒர் அலகாகவும் கொள்ளலாம்.

ஆற்றல் (Energy): வேலை செய்யக்கூடிய திறமையை ஆற்றல் என்கிறோம். ஆற்றலின் அலகுகளும் வேலையின் அலகுகளும் ஒன்றே. இயக்கவியலில், ஆற்றல் இருவகைப்படும்.

(1) இயக்காற்றல் (கி. ஆ.)

(2) நில ஆற்றல் (பி. ஆ.)

இயக்காற்றல் (கி. ஆ.) (Kinetic energy): ஒரு பொருளின் இயக்காற்றல் என்பது அது இயங்குவதற்குக் கிடைக்கும் ஆற்றலேயாகும்.

பொருள் இயங்குவதற்கு எதிராகச் செயல்படும் விசை அதைத் தடுத்து நிறுத்தும்போது செய்யப்படும் வேலையை இயக்காற்றல் என்கிறோம்.

ஒரு குதிர்ப்பிட்ட நேரத்தில், ஒரு பொருளின் திசையெகம் 'V' என்றும், அதன் மாதையிலுள்ள மாறாத புள்ளியிலிருந்து 's' தூரம் உடன்தென்றும் சொல்க. F விசை, 'ds' தூரம் அப் பொருளை நகர்த்தட்டும். 'a' என்பதை முடுக்கம் என்க.

$$\begin{aligned}\therefore \text{இயக்காற்றல்} &= \int_s^0 -F ds \\ &= \int_s^0 -mads \\ &= \int_V^0 -m \frac{VdV}{ds} ds\end{aligned}$$

$$= m \int_0^V V dV$$

$$= \frac{mV^2}{2}$$

V திசையிலேத்தட்டல் நகரும் 'm' திணிவுள்ள ஒரு பொருளின் கிளப்பாற்றல் $= \frac{1}{2}mV^2$.

m, கிராம்களிலும் V செ.மீ./விநாடியிலும் கொடுக்கப்பட்டால் கி. ஆ. = எஃக் என்ற அலகில் கிடுக்கும். (C.G.S. முறையில்)

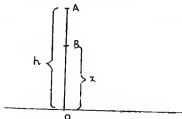
F.P.S. முறையில் கி. ஆ. = அடிப்பவுண்டில் என்ற அலகில் கிடுக்கும்.

நிலையாற்றல் (கி. ஆ.) (Potential energy): ஒரு பொருள் தனது கிடத்திலிருந்து, மற்ருள் கிடத்திற்குச் செல்லுவதற்கான வேலையை நிலையாற்றல் என்கிறோம்.

'm' என்ற திணிவுள்ள பொருள் பூமிக்குமேல் 'h' உயரத்தில் கிடுப்பதற்குக் கொடுக்குவோம். எனவே, பொருளின் நிறை = mg ஆகும். அதை 'h' தூரம் நகர்த்துவதற்கான வேலை = mgh ஆகும்.

∴ கி. ஆ. = mgh.

ஆற்றலின் உத்தக் காப்புவிதி (Law of Conservation of Energy): ஆற்றலை அழிக்கவோ, ஆக்கவோ அல்லது குறைக்கவோ முடியாது. ஒருவகைப்பட்ட ஆற்றலை மற்ருரு வகை ஆற்றலாகத்தான் மாற்ற முடியும்.



விதைச் செங்குத்தாக விழும் ஒரு பொருள் கொண்டுக்கும் மொத்த ஆற்றலின் மூலம் திருப்பிப்போம்.

A-லிருந்து 'm' நிறமிடின் ஒரு துகள் நிலைநிலைப்பில் விழுவதாகவும் கொள்ளுவோம். 't' நேரத்தில் துகள் B-ல் இருப்பதாகவும் கொள்ளுவோம்.

$$V_x = \sqrt{2g(h-x)}$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{நியூட்டனியல்} &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}m2g(h-x) \\ &= mg(h-x)\end{aligned}$$

$$x \text{ உயரத்தில் இருப்பதால் நிலை ஆற்றல்} = mgx,$$

$$\therefore \text{நியூட்டனியல்} + \text{நிலை ஆற்றல்} = mg(h-x) + mgx = mgh$$

$$= \text{மாதிரி}$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{O-ல் நியூட்டனியல்} &= \frac{1}{2}m \cdot 2gh \\ \text{நிலைப்பற்றல்} &= 0\end{aligned}$$

$$\therefore \text{கூட்டுத்தொகை} = mgh$$

$$A\text{-ல் நியூட்டனியல்} = 0$$

$$\text{நிலைப்பற்றல்} = mgh$$

$$\therefore \text{கூட்டுத்தொகை} = mgh$$

வேலை ஆற்றல் விதி (Law of Work-Energy)

துகளின் இருப்பிடத்தில் மாறுதல் ஏற்படும்போது, நியூட்டனியல் துகளின் மாறுதல், செயற்படு விசைகளினால் உண்டாகும் வேலையின் அளவுக்குச் சமமாகும்.

's' தூரம் துகள் நகரும்போது, அதன் திசைவேகம் 'u' இருந்து 'v'-க்கு மாறுவதாகக் கொள்ளுவோம். அதற்கான விசை 'F' என்க.

$$\therefore \text{விசையினால் 'ds' தூரம் நகரும்போது செயற்படு வேலை}$$

$$= \int_u^v F ds$$

$$= \int_u^v m \cdot f \cdot ds$$

$$= \int_u^v m \cdot v \cdot \frac{dv}{v} \quad \text{ஆக}$$

$$= m \int_u^v v dv$$

$$= \frac{1}{2} m (v^2 - u^2) \text{ மியக்காற்றின் மொத்தம்.}$$

ஆற்றல் அழியின்மை விதி, அல்லது ஆற்றல் காப்பு விதி என்பதைப் பற்றிச் சற்று ஆராய்வோம். அந்த விதியை,

“ஒரு பொருளோ அல்லது ஒரு பொருளின் தொகுதியோ விசைகளின் காப்புநிலைத் தொகுதி செயல்படும்போது, அதன் மியக்காற்றல் கள், நிலைமாதல்கள் மிகைகளின் கூட்டுத்தொகை ஒரு மாறியியாகும்” என்று கூறலாம்.

மேற்கண்ட விசைகளைக் காப்புநிலை விசையெனலாம். அப்படிப்பட்ட விசைகள் பொருள்களின் நிலை அல்லது அவைகளின் அமைப்பு மிகைகளைப் பொறுத்திருக்குமேயல்லாமல், பொருள்களின் மியக்கல்களால் ஏற்படும் திசைவேகங்கள் அல்லது அவைகளின் திசைகள் மிகைகளைச் சார்ந்திருக்காது.

உராய்வு விசை, காற்றின் தடைவிசை மிகைகள் காப்புநிலை விசைகள் அல்ல. உராய்வு விசையின் திசை, பொருள் மியக்கும் திசைக்கு எதிராக இருப்பதால் அது, திசையைச் சார்ந்திருக்கிறது. காற்றின் தடைவிசை, பொருளின் திசைவேகத்தின் அடுக்கின் விகிதத்தில் இருக்கும். எனவே, மிகைகளைக் காப்புநிலை விசைகளிலிருந்து நீக்கவேண்டும்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

1. 10 பவுண்ட் திணிவுள்ள ஒரு பொருள் கிடைதிசையிலுள்ள உராய்வற்ற மேலுறியின்மேல் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. அதன்மேல் 3 பவுண்டு திறைக்குச் சமமான விசை செலுத்தப்படுகிறது. அப்படியென்றால் 10 விநாடிகளில் பொருள் தகரும் தூரமென்ன?

பொருளின்மேல் செலுத்தப்படும் விசை = 3 பவுண்டு திறை

= 3g பவுண்டுகள்

தகரும் பொருளின் திணிவு = 10 பவுண்ட்

முடுக்கம் = $\frac{3g}{10}$

∴ தகரும் தூரம் = $\frac{1}{2} \cdot \frac{3g}{10} \cdot 10^2$

= 15g

= 480 அடிகள்

2. 1 கிராம்கிராம் திணிவுள்ள பொருளின்மேல் 5 விநாடிகள் செலுத்தப்படும் விசை, விநாடிக்கு 1 மீட்டர் திசைவேகம் உண்டாக்கினால் அந்த விசையின் அளவைக் கண்டுபிடிக்க.

$$\begin{aligned}
 \text{திசைவேகம்} &= 1 \text{ மீட்டர்/விநாடி} \\
 &= 100 \text{ செ.மீ./விநாடி} \\
 \therefore \text{முடுக்கம்} &= \frac{100}{5} \\
 &= 20 \text{ செ.மீ./விநாடி}^2 \\
 \therefore \text{விசை} &= 1000 \times 20 \text{ டைன்கள்} \\
 &= \frac{1000 \times 20}{981} \text{ நியூ} \\
 &= 20.4 \text{ கிராம்கள்.}
 \end{aligned}$$

3. ஒரு கிராமில் வண்டியும் அதன் எஞ்சினும் சேர்த்து 203 டைன்கள் எடை உடனான. எஞ்சின் மட்டும் 4 டைன் நிறுக்கக்கூடிய வலிவு பெற்றுள்ளது. வண்டியின் நியூட்டனியல் தடை ஒரு டைனுக்கு 20 பவுண்ட் நிறை என்ற விதத்தில் வேலை செய்கிறது. எஞ்சினின் பீரேக்குவரின் சக்தி டைனுக்கு 400 பவுண்ட் நிறை என்ற விதத்தில் உள்ளது. கிராமில் வண்டி ஒவ்வொரு நேரம் புறப்பட்டு மணிக்கு 40 மைல்கள் திசைவேகமடையும்வரை சீராக நியூட்டனியல் தடை இருப்பது தீர்வாக தடைசெய்யப்பட்டு, பீரேக்குவரின் செலுத்தப்படுகின்றன. கிராமில் வண்டி நிற்கும்வரை செல்லும் மொத்த தூரத்தையும் அதற்கான தேர்தகைக் கண்டுபிடிக்க.

எஞ்சினின் நிறுப்புச் சக்தியினால், வண்டியின் நியூட்டனியல் தடைகள் விசை = $4 \times 2240g$ பவுண்டல்கள். அதற்குத் தடையான எதிர்விசை, 203 டைன்கள் எடையினால் உண்டாகிறது.

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{எதிர்விசை} &= 203 \times 20g \text{ பவுண்டல்கள்} \\
 \therefore \text{வீண்புவிசை} &= 4 \times 2240g - 203 \times 20g \\
 &= (8960 - 4060)g \\
 &= 4900g \text{ பவுண்டல்கள்} \\
 P &= m \times f \text{ ஆதலால்} \\
 \text{முடுக்கம்} &= \frac{4900g}{203 \times 2240} \text{ அடி/விநாடி}^2 \\
 &= \frac{10}{29} \text{ அடி/விநாடி}^2 \\
 g &= 32 \text{ என்ற சென்சு} \\
 V &= \text{மணிக்கு 40 மைல்கள்} \\
 &= \frac{176}{3} \text{ அடி/விநாடி}
 \end{aligned}$$

$$V^2 = U^2 + 2fs$$

$$\left(\frac{176}{3}\right)^2 = 2 \times \frac{10}{29} \times s$$

$$s = \frac{176 \times 176 \times 29}{9 \times 20} \text{ அடிகள்} \quad \dots\dots(1)$$

தேரம் $V = U + ft$

$$\frac{176}{3} = \frac{10}{29} \cdot t$$

$$\therefore t = \frac{176 \times 29}{3 \times 10} \text{ விநாடிகள்} \quad \dots\dots(2)$$

இப்போது 190ரேக்குகள் செலுத்துவதால் நிபக்கத்திற்குத் தடை செய்யும் விளைவு,

$$= 203 [20g + 400g] \text{ பவுண்டுகள்}$$

$$= 203 \times 420 \times g$$

$$= \frac{203 \times 420 \times 32}{6} \text{ அடி}/(\text{விநாடி})^2$$

$$= 6 \text{ அடி}/(\text{விநாடி})^2$$

$\frac{176}{3}$ நிபக்கவேகத்துடன், 6 அடி/விநாடி² முடுக்கத்துக்கு உட்பட்டு வண்டி ஓய்விற்கு வருகிறது.

$$0 = \left(\frac{176}{3}\right)^2 - 12 \times s'$$

$$\therefore s' = \frac{176 \times 176}{9 \times 12} \text{ அடிகள்} \quad \dots\dots(3)$$

அதற்கான தேரம் $0 = \frac{176}{3} - 6t'$

$$\therefore t' = \frac{176}{3 \times 6} \text{ விநாடிகள்} \quad \dots\dots(4)$$

(1)+(3) $s + s' =$ மொத்த தூரம்

$$= \frac{176 \times 176 \times 29}{9 \times 20} + \frac{176 \times 176}{9 \times 12}$$

$$= \frac{176 \times 176}{9} \left[\frac{87 + 5}{60} \right]$$

$$= \frac{176 \times 176 \times 92}{9 \times 60} \text{ அடிகள்}$$

$$= \frac{176 \times 176 \times 92}{9 \times 60 \times 3 \times 220 \times 8}$$

$$= \frac{2024}{2025} \text{ மைல்}$$

$$\begin{aligned}
 \text{மொத்த நேரம்} &= \frac{176 \times 29}{30} + \frac{176}{18} \text{ விநாடிகள்} \\
 &= \frac{176}{90} [87 + 5] \\
 &= \frac{176 \times 92}{90} \\
 &= \frac{16192}{90} \\
 &= 179.9 \text{ விநாடிகள்}
 \end{aligned}$$

4. கிடைசமதளத்தில் மணிக்கு 43 மைம்கள் சீரானவேகத்தில் செல்லும் கிரயில் வண்டி 75ல் 1 என்ற வீதத்திலுள்ள சாய்தளத்தின் மேல் ஏறுகிறது. சாய்தளத்தின்மேல் ஏறும்போது வண்டியின் எஞ்சினின் கிழப்பூச் சக்தி கிடைசமதளத்திலுள்ளது பேரளிகுக்கும். வண்டி எவ்வளவு நேரம் சாய்தளத்தின்மேல் சென்று நிற்கும்?

கிரயில் வண்டி சீரான திசைவேகத்தடிக் கியங்குவதால் எஞ்சினின் கிழப்பூச் சக்தி, கிரயில் வண்டியின் கியக்கத்துக்கு எதிரான எதிர்விசைக்கு சமமாகவேண்டும்.

சாய்தளத்துக்குமேல் செல்லும்போது, எஞ்சினின் கிழப்பூச் சக்தியும், எதிர்விசையும் ஒரே அளவுக்கு கிழக்குமானாலும், சாய்தளத்தின் போக்கில் வண்டியின் நிகழயினுடைய கூறு, வண்டியைத் தடைசெய்யத் தொடங்குகிறது.

வண்டி, எஞ்சின் கிணவகளின் மொத்தத்தினிடி 'm' பவுண்டுகள் என்றால் கிணவகளின் மொத்த நிறையின் கூறு, சாய்தளத்தின் போக்கில் $\frac{m \times g}{75}$ பவுண்டுகள்

$$\therefore P = m \cdot f \text{ ஆதலால்}$$

$$\text{எதிர்விசை} = \frac{g}{75} \text{ அடி/(விநாடி)}^2$$

$$\text{ஆசம்பத் திசைவேகம்} = 43 \text{ மைல்/மணி}$$

$$= \frac{43 \times 88}{60} \text{ அடி/விநாடி}$$

$$\text{வண்டி நிற்கும்போது திசைவேகம்} = 0 \text{ ஆகும்}$$

$$0 = \left(\frac{43 \times 88}{60} \right)^2 - 2 \cdot \frac{g}{75} \cdot s$$

$$\begin{aligned}\therefore a &= \frac{16 \times 88 \times 88}{2525} \times \frac{75}{2 \times 32} \\ &= \frac{11}{25} \times \frac{33 \times 16 \times 75}{2 \times 32 \times 5280} \\ &= \frac{33}{90} \\ &= 1.1 \text{ மைல்}\end{aligned}$$

5. 500 பவுண்டுகள் திணிவுள்ள ஒரு பொருள் ஓய்விலிருந்து, கிடைதிரைப்புடன் $\sin^{-1} \frac{1}{20}$ ஞ் கோணமுடைய சாய்தளத்திலேமேல் நழுவுகிறது. சாய்தளத்தின் உராய்வு 10 பவுண்டு திறையாகும். ஞ்ரம்ப கிடைத்திலிருந்து d அடிதன் ஞ்ரம்ப தனித்தவுடன் பொருளின் வேகத்தைக் கண்டுபிடிக்க.

சாய்கோணம் α என்றால்

$$\sin \alpha = \frac{1}{20}$$

எனவே, சாய்தளத்தின் திசையில் பொருளின் திறையின் கூறு

$$= 500 \sin \alpha \text{ பவுண்டு திறை}$$

$$= 500 \times \frac{1}{20}$$

$$= 25 \text{ பவுண்டு திறை}$$

$$\text{உராய்வு விசை} = 10 \text{ பவுண்டு திறை}$$

$$\text{எனவே வினைவு விசை} = 15 \text{ பவுண்டு திறை}$$

$$= 15 \times 32 \text{ பவுண்டுகள்}$$

$$F = mf \text{ என்பதால்}$$

$$f = \frac{15 \times 32}{500}$$

$$= \frac{24}{25} \text{ அடி/(விநாடி)}^2$$

$$\text{ஞ்ரம்பத் திசைவேகம் } U = 0$$

$$f = \frac{24}{25}$$

$$a = d$$

$$\therefore V^2 = U^2 + 2fs$$

$$= 0 + 2 \times \frac{24}{25} \cdot d$$

$$= \frac{48}{25} d$$

$$\therefore V = \frac{4}{5} \sqrt{3d} \text{ அடி/விநாடி.}$$

6. 10 அடிகள் திணிவுள்ள ஒரு குண்டு, ஒன்றிலிருந்து 60 அடிகள் திணிவுள்ளவின் கீழ்தோக்கி விழுந்து, ஒரு கூலரின் ஊடே சென்று, அதன் திணிவுகளைப் பாதிப்பாகக் குறைத்துக் கொண்டது. மேலும் 20 அடிகள் சென்று தளரவைத் தாக்கி 1 அடி பள்ளத்தை உண்டாக்குகிறது. தளரவில் சராசரித் தடையின் அளவைக் கண்டுபிடிக்க.

60 அடிகள் தாக்கும்போது குண்டு அடையும் திணிவுகளை

$$= \sqrt{2 \times 32 \times 60}$$

$$= 16 \times \sqrt{15} \text{ அடிகள்/விநாடி}$$

கூலரின் ஊடே சென்ற பிறகு திணிவுகளை

$$= \sqrt{15} \text{ அடிகள்/விநாடி}$$

20 அடிகள் தாக்கித் தளரவை அடையும்போது குண்டின்

$$\text{திணிவுகளை} = \sqrt{64 \times 15 + 2 \times 32 \times 20}$$

$$= \sqrt{960 + 1280}$$

$$= \sqrt{2240}$$

தளரவில் தடை அளவு = R பவுண்ட் திறை எவ்வு.

குண்டின் திறை = 10 அடிகள்

$$= \frac{10}{16} \text{ பவுண்ட் திறை}$$

∴ விசையு தடை = $(R - \frac{5}{8})$ பவுண்ட் திறை

$$= (R - \frac{5}{8}) \times 32 \text{ பவுண்டுகள்}$$

$$F = mf$$

$$\left(R - \frac{5}{8}\right) \times 32 = \frac{5}{8} \times f$$

$$\therefore f = \left(R - \frac{5}{8}\right) \times 32 \times \frac{8}{5}$$

குண்டு தளரக்குள் 1 அடி சென்று திணிவெழுகிறது.

$$0 = 2240 - 2 \left[R - \frac{5}{8} \right] \times \frac{32 \times 8}{5} \times 1$$

$$\therefore R - \frac{5}{8} = \frac{2240 \times 5}{8 \times 32 \times 2}$$

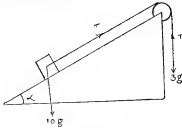
$$R = \frac{35 \times 5}{8} + \frac{5}{8}$$

$$= \frac{9}{2}$$

$$= \frac{45}{2}$$

$$= 22.5 \text{ பவுண்ட் திறை}$$

7. 5 அடி நீளமும், 1 அடி உயரமுமுள்ள சாய்தளத்தின் உச்சியில் இருக்கும் உதராயத்தர கப்பெக்செம்மேல் செல்லும் மிகேலோன தூக் 10 பவுண்ட், 3 பவுண்ட் திணிவுள்ள பொருள்களில் சேர்க்கிறது. 10 பவுண்ட் பொருள் சாய்தளத்தின் மேலுள்ளது. 3 பவுண்ட் பொருள் தடங்கலில்லாதத் தொங்குகின்றது. தூயின் முடுக்கத்தையும், தூயின் மிகுவிசையையும் கண்டுபிடிக்க.



படம் 50.

சாய்கோணம் ' α ' என்றால்

$$\sin \alpha = \frac{1}{5}$$

10 பவுண்ட் திறையின் சாய்தளத்தின் போக்கில் கூறு

$$= 10g \times \sin \alpha$$

$$= 10g \times \frac{1}{5}$$

$$= 2g \text{ பவுண்டுகள்.}$$

சாய்தளத்தின்மேல் விளைவு விசை

$$= T - 2g \text{ பவுண்டுகள்}$$

3 பவுண்ட் திறை கீழே தொங்கும்போது விளைவு விசை

$$= 3g - T \text{ பவுண்டுகள்}$$

$$3f = 3g - T$$

$$10f = T - 2g$$

$$\therefore 13f = g$$

$$\therefore f = \frac{32}{13} \text{ அடிகம்/(விநாடி)}^2$$

$$\begin{aligned}
 \therefore T &= 3g - 3f \\
 &= 96 - \frac{96}{13} \\
 &= \frac{96 \times 12}{13} \\
 &= \frac{1152}{13} \text{ பவுண்டுகள்.}
 \end{aligned}$$

8. 150 டன் திணிவுள்ள நிரலில் வண்டி, 100-ம் ஒன்று என்ற வீதத்திலுள்ள சாய்தளத்திற்கு மணிக்கு 30 மைல் வேகத்தில் வருகிறது. எஞ்சினின் மாதிரி விசையினால் வண்டி சாய்தளத்தில் உச்சியை அடைகிறது. சாய்தளத்தின் நீளம் 1 மைலாகும். பிறகு நீராவி திறத்தப் படுவதால், கிடைதளத்தின் மேல் ½ மைல் ஓடி நிற்கிறது. தளத்தின் உராய்வு, காற்றின் தடை, இவைகளின் கூட்டுத்தொகை டனனுக்கு 8 பவுண்டு என்று கொண்டால், எஞ்சினின் விசையைக் கண்டுபிடிக்க.

தளத்தின் உராய்வு, காற்றின் தடை, இவைகளினால்

$$\text{எதிர்விசை} = 150 \times 8g \text{ பவுண்டுகள்}$$

$$= 1200g \text{ பவுண்டுகள்}$$

சாய்தளத்தின் போக்கில், வண்டியின் திறமையின் கூறு

$$= 150 \times 2240 \times g \times \frac{1}{100}$$

$$= 3360g \text{ பவுண்டுகள்}$$

$$\text{எஞ்சின் விசை} = x \text{ டன் திறை எனக் கொடுக்க.}$$

$$\therefore \text{விசையு விசை} = 3360g - 1200g + x \times 2240 \times g$$

$$= [2240x - 4560]g$$

$$P = mf \text{ என்பதால்}$$

$$f = \frac{(2240x - 4560)g}{150 \times 2240}$$

$$= g \left[\frac{x}{150} - \frac{19}{1400} \right]$$

$$\text{ஆரம்பத் திசைவேகம்} = 30 \text{ மைல்/மணி}$$

$$= 44 \text{ அடி/விநாடி}$$

சாய்தளத்தில் உச்சியை அடைவதற்கு வண்டியின் திசைவேகம்

$$= \sqrt{44^2 + 2 \times 1760 \times 3f}$$

சாய்தளத்தின் உச்சியை அடைந்த பிறகு கிடைதளத்தில் வண்டி செல்லும்போது, வண்டியின் போக்குக்குத் தடை, தளத்தின் உராய்வு, காற்றின் தடை, இவைகள் தான்.

$$\therefore \text{தடை விசை} = -1200g$$

$$\text{அப்போது முடுக்கம்} = \frac{1200g}{150 \times 220} = -\frac{g}{280}$$

$\frac{1}{2}$ மைல் வரையில் ஓடிய பிறகு வரிக் நித்திரை.

$$\therefore V = \sqrt{44^2 + 2 \times 3 \times 1760 \times f}$$

$$\left[f = g \left(\frac{x}{150} - \frac{19}{1400} \right) \right]$$

$$V = 0$$

$$f' = -\frac{g}{280}$$

$$s = \frac{1}{2} \text{ மைல்}$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 220 \times 3$$

$$= 3 \times 880$$

$$0 = 44^2 + 6 \times 1760 \times f - \frac{2 \times g}{280} \times 3 \times 880$$

$$10560f = \frac{2 \times 32 \times 3 \times 880}{280} - 44 \times 4$$

$$= \frac{176}{7} [24 - 77]$$

$$= -\frac{176 \times 53}{7}$$

$$10560 \times 32 \left[\frac{x}{150} - \frac{19}{1400} \right]$$

$$= -\frac{176 \times 53}{7}$$

$$\frac{x}{150} - \frac{19}{1400} = -\frac{\frac{11}{176 \times 53}}{7 \times 10560 \times 32}$$

$$\frac{x}{150} = \frac{19}{1400} - \frac{53}{14 \times 10560}$$

$$960$$

B, C கம்பிகள், மத்தத் துண்டுகளின்மேல் விசைவு விசைகள் வகுமாறு :

$$B \text{ கம்பிகின் மேல்} = T - 2T_1 - 7g \text{ மேல்நோக்கி}$$

$$C \text{ கம்பிகின் மேல்} = 3T_2 + 5g - T \text{ கீழ்நோக்கி}$$

$$B\text{-ஐக்} 2 \text{ பவுண்ட் திணிவின் மேல்} = T_1 - 2g \text{ மேல்நோக்கி}$$

$$B\text{-ஐக்} 3 \text{ பவுண்ட் திணிவின் மேல்} = 3g - T_1 \text{ கீழ்நோக்கி}$$

$$C\text{-ஐக்} 3 \text{ பவுண்ட் திணிவின் மேல்} = T_2 - 3g \text{ மேல்நோக்கி}$$

$$C\text{-ஐக்} 4 \text{ பவுண்ட் திணிவின் மேல்} = 4g - T_2 \text{ கீழ்நோக்கி}$$

வித்த நூறு விசைகளுக்கும் $P = mf$ என்ற

சமன்பாட்டை உபயோகிப்படுத்துக.

$$T - 2T_1 - 7g = 7f \quad \dots\dots(1)$$

$$2T_1 + 5g - T = 5f \quad \dots\dots(2)$$

$$T_1 - 2g = 2f_1 \quad \dots\dots(3)$$

$$3g - T_1 = 3f_2 \quad \dots\dots(4)$$

$$T_2 - 3g = 3f_3 \quad \dots\dots(5)$$

$$4g - T_2 = 4f_4 \quad \dots\dots(6)$$

மேலும் ஒரு கம்பியைப் பொறுத்தது. அதன் கீழ் பக்கமுருக்கல் கனம் சமம்.

$$f_1 - f = f + f_2 \quad \dots\dots(7)$$

$$f_3 + f = f_4 - f \quad \dots\dots(8)$$

$$(3) + (4) \quad 2f_1 + 3f_2 = g \quad \dots\dots(9)$$

$$(5) + (6) \quad 3f_3 + 4f_4 = g \quad \dots\dots(10)$$

$$(1) + (2) \quad 2T_2 - 2T_1 - 2g = 12f \quad \dots\dots(11)$$

$$(3) - (4) \quad 2T_1 - 5g = 2f_1 - 3f_2 \quad \dots\dots(12)$$

$$\therefore 2T_1 = 5g + 2f_1 - 3f_2 \quad \dots\dots(12)$$

$$(5) - (6) \quad 2T_2 - 7g = 3f_3 - 4f_4 \quad \dots\dots(13)$$

$$2T_2 = 7g + 3f_3 - 4f_4 \quad \dots\dots(13)$$

(12), (13)-க்குத்து T_1, T_2 -ன் உதர்புகளை உபயோகித்தால்

$$7g + 3f_3 - 4f_4 - 5g - 2f_1 + 3f_2 - 2g = 12f$$

$$-2f_1 + 3f_2 + 3f_3 - 4f_4 = 12f \quad \dots\dots(14)$$

$$(7)\text{-க்குத்து} f_1 = 2f + f_2 \quad \dots\dots(15)$$

$$(8)\text{-க்குத்து} f_3 = f_4 - 2f \quad \dots\dots(16)$$

REFERENCE

(9), (10), (14) சமன்பாடுகளில் (15), (16)-யிலிருந்து f_1 , f_2 மதிப்புகளை உபயோகித்தால்

$$\begin{aligned} 4f + 2f_2 + 3f_2 &= g \\ 4f + 5f_2 &= g \end{aligned} \quad \dots\dots(17)$$

$$\begin{aligned} 3f_4 - 6f + 4f_4 &= g \\ 7f_4 - 6f &= g \end{aligned} \quad \dots\dots(18)$$

$$\begin{aligned} -4f - 2f_2 + 3f_2 + 3f_4 - 6f - 4f_4 &= 12f \\ f_2 - f_4 &= 22f \end{aligned} \quad \dots\dots(19)$$

$$\therefore f_2 = 22f + f_4$$

\therefore (17), சமன்பாடு

$$\begin{aligned} 4f + 110f + 5f_4 &= g \\ 5f_4 + 114f &= g \end{aligned} \quad \dots\dots(20)$$

(18) $\times 5 -$ (20) $\times 7$

$$35f_4 - 30f - 35f - 798f = 5g - 7g$$

$$-828f = -2g$$

$$\therefore f = \frac{g}{414}$$

$$5f_4 = g - 114f$$

$$= g - \frac{114g}{414}$$

$$= \frac{300g}{414}$$

$$f_4 = \frac{60g}{414} = \frac{30}{207} g$$

$$f_2 = 22 \cdot \frac{g}{414} + \frac{60g}{414} \quad [\text{from (19)}]$$

$$= \frac{82g}{414} = \frac{41g}{207}$$

$$f_1 = 2 \cdot \frac{g}{414} + \frac{82g}{414} \quad [\text{from (15)}]$$

$$= \frac{84g}{414} = \frac{42}{207} g$$

$$f_3 = \frac{60g}{414} - 2 \cdot \frac{g}{414} \quad [\text{from (16)}]$$

$$= \frac{58g}{414} = \frac{29}{207} g$$

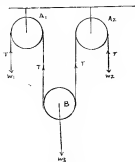
10. கிடைதிரையிலுள்ள ஒரு தேர்ச்சேட்டில் A_1, A_2 என்ற இரண்டு கம்பிகள் உள்ளன. A_1, A_2 என்ற கம்பிகளின்மேல் செல்லும் இரண்டாவது தூள் அந்த ஒரு முனையில் W_1 என்ற நிறையும், மற்ருரு முனையில் W_2 என்ற நிறையும் கொண்டிருக்கிறது. W_3 என்ற நிறையை ரத்தம் B என்ற மூக்குவது கம்பி, A_1, A_2 -க்கு கிடைபேயுள்ள தூளில் தொங்குகிறது. A_1, A_2 இவைகளைச் சமீபமாக வைத்து, தொங்கும் தூளின் பகுதிகளில் எல்லாம் திரைதிரையில் உள்ளதாகக் கொள்க.

எல்லா நிறைகளும் நகர்த்துகொண்டிருக்கும் போது, தூளின் கிழுவிரையைக் கண்டுபிடிக்க.

W_1, W_2 என்ற நிறைகளை நகரும்போது, W_3 நிறைநிலையில் கிழர்ப்பதான விபத்தனை

$$4W_1 W_2 = W_3 (W_1 + W_2)$$

என்று திருபிக்க.



படம் 52.

W_1, W_2 என்ற நிறைகளை கீழ்தோக்கி முறையே w_1, w_2 தூரங்கள் நகர்த்தால் எமர்சன் முறைப்படி $W_3, \frac{w_1 + w_2}{2}$ மேல்தோக்கி நகரும்.

அதேபோல் W_1 , கீழ்தோக்கி w_1 தூரம், W_2 மேல்தோக்கி w_2 தூரம் நகர்த்தால், $W_3 \frac{w_1 - w_2}{2}$ தூரம் மேல்தோக்கி நகரும். மேலும் f_1, f_2, f_3 என்றவை முறையே W_1, W_2, W_3 என்பவைகளின் முடுக்கங்களானால்

$$f_3 = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

W_1 கீழ்தோக்கி நகருவதாலும், W_2 , W_3 மேல்தோக்கி நகருவதாலும் கொஞ்சுமோம்.

$$W_1 - T = \frac{W_1}{g} f_1 \quad \dots\dots(1)$$

$$T - W_2 = \frac{W_2}{g} f_2 \quad \dots\dots(2)$$

$$2T - W_3 = \frac{W_3}{g} f_3 \quad \dots\dots(3)$$

f_1 கீழ்தோக்கிய முடுக்கமாலும், f_2 , f_3 எல்பவை மேல்தோக்கிய முடுக்கமாலும் இருப்பதால்

$$f_3 = \frac{f_1 - f_2}{2} \quad \dots\dots(4)$$

∴ (3) எவ்வாறு

$$2T - W_3 = \frac{W_3}{g} \left[\frac{f_1 - f_2}{2} \right] \quad \dots\dots(5)$$

$$\frac{4T}{W_3} - 2 = \frac{1}{g} [f_1 - f_2] \quad \dots\dots(6)$$

$$= 1 - \frac{T}{W_1} - \frac{T}{W_2} + 1$$

$$= 2 - \frac{T}{W_1} - \frac{T}{W_2}$$

$$\therefore T \left[\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} + \frac{4}{W_3} \right] = 4$$

$$\therefore T = \frac{4}{\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} + \frac{4}{W_3}}$$

W_3 நல்லவருத்தால் $f_3 = 0$ ஆகும்.

$$\therefore (3) \text{ -க்குத் } 2T - W_3 = 0$$

$$\therefore W_3 = 2T$$

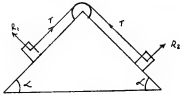
$$= \frac{8}{\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} + \frac{4}{W_3}}$$

$$W_3 \cdot \frac{W_1 + W_2}{W_1 W_2} + 4 = 8$$

$$\therefore W_3 (W_1 + W_2) = 4W_1 W_2 \text{ ஆகிறது.}$$

11. முக்கோண வடிவமான 'M' திணிவுள்ள ஓர் ஆப்பு வழுவுறுப்பான கிடைதொயிறுவின் மேனையின்மேல் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. முக்கோணத்தின் உச்சியிலுள்ள ஓரு கப்பியின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு திரிமான தூலின் ஒரு முனையின் மீ திணிவும், மற்றொரு முனையின் $2m$ திணிவுள்ள கிடு துகள்கள் ஆட்டின் வழுவுறுப்பான கிடு பக்கங்களிலும், பக்கத்திற்கு ஒன்றாக உள்வன. ஆப்பின் கிடு பக்கங்களும், கிடைதொயிறுடன் 'α' கோணத்தை உண்டாக்குகின்றன. ஆப்பின் முடுக்கம், மற்றும் துகள்களின் முடுக்கம் திணைகளைக் காட்டுக.

ஆப்பின் முடுக்கம் F என்க. $2m$ திணிவின் முடுக்கத்தைச் சாய்தளத்தின் போக்கில் f_1 என்றும் அதற்கு நேர்க்குத்துத் திசையில் f_2 என்றும் கூறுபோடுக. அதேபோல் 'm' திணிவின் முடுக்கத்தை f_3, f_4 என்று கூறு போடுக.



படம் 53.

மீரண்டு சாய்தளங்களின் எதிர்த்திசைகள் R_1, R_2 என்க. தூலின் கிடுவிசையை T என்று கொள்க.

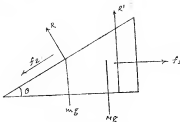
சாய்தளங்களுக்கு நேர்க்குத்துத் திசையில் திணிவுகளின் விசைவு விசைகள்

$2mg \cos \alpha - R_1, R_2 - mg \cos \alpha$ என்றாகும். எனவே, அந்தத் திசையில் இயக்கத்தைக் கவனிக்கலாம்.

$$2mf_2 = 2mg \cos \alpha - R_1 \quad \dots\dots(1)$$

$$mf_4 = R_2 - mg \cos \alpha \quad \dots\dots(2)$$

$2m, m$ திணிவுகள் தளங்களுடன் தொடர்புகொண்டிருப்பதால் $f_2 = f_4 = F \sin \alpha$ என்றுகிறது.



படம் 54.

ஆப்பு வரக்கூடாது என்பதை f_1 என்ற முடுக்கத்துடன் கிடைதளத்தின் மேல் நகரவதற்குக் கொள்ளுவோம்.

ஆப்பைப் பொறுத்தது, m திணிவுள்ள பொருள் சாய்தளத்தின்மேல் கிழிதோக்கி f_2 என்ற முடுக்கத்துடன் நகரட்டும்.

எனவே, m திணிவுள்ள பொருளின் உண்மையான முடுக்கம் f_2 f_1 என்பதையகலிவிட்டு விடாது முடுக்கமே.

\therefore சாய்தளத்தின் பேரத்தில் பொருளின் முடுக்கம் $f_2 - f_1 \cos \theta$ என்றும் அதற்கு நேர்க்குத்துத் திசையில் $f_1 \sin \theta$ என்றும் ஆகிறது.

\therefore பொருளின் கியூக்கச் சமன்பாடுகள்

$$m(f_2 - f_1 \cos \theta) = mg \sin \theta \quad \dots\dots(1)$$

$$m f_1 \sin \theta = mg \cos \theta - R \quad \dots\dots(2)$$

ஆப்பின் கியூக்கச் சமன்பாடுகள், கிடைதளச், திசுநிலை கிடைதளத்தில்

$$M f_1 = R \sin \theta \quad \dots\dots(3)$$

$$0 = Mg + R \cos \theta - R' \quad \dots\dots(4)$$

(2) $\sin \theta + (3)$

$$f_1 [m \sin^2 \theta + M] = mg \sin \theta \cos \theta$$

$$\therefore f_1 = \frac{mg \sin \theta \cos \theta}{m \sin^2 \theta + M}$$

$$\begin{aligned} f_2 &= g \sin \theta + \frac{\cos \theta}{m \sin^2 \theta + M} \frac{mg \sin \theta \cos \theta}{m \sin^2 \theta + M} \\ &= \frac{mg \sin^3 \theta + M \sin \theta + mg \sin \theta \cos^2 \theta}{m \sin^2 \theta + M} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{mg \sin \theta + Mg \sin \theta}{m \sin^2 \theta + M} \\
&= \frac{m+M}{m \sin^2 \theta + M} g \sin \theta \\
R &= \frac{M}{\sin \theta} \frac{mg \sin \theta \cos \theta}{m \sin^2 \theta + M} \\
&= \frac{mg M \cos \theta}{m \sin^2 \theta + M} \\
R' &= Mg + \frac{M mg \cos^2 \theta}{m \sin^2 \theta + M} \\
&= \frac{M mg + M^2 g}{m \sin^2 \theta + M} = \frac{(M+m)Mg}{m \sin^2 \theta + M}
\end{aligned}$$

13. டிரளூக்கு 20 பவு. நிறை அளவுள்ள தடைக்கு எதிராக 300 டன் நிறையுள்ள ஓர் இரயில் வண்டியை மணிக்கு 30 மைல் சீரான வேகத்தில் கிடைதளத்தில் செலுத்தும் எஞ்சினின் குதிரைத் திறனைக் கண்டுபிடி.

வேகம் சீராக உண்டாகும், எஞ்சினின் மிழுப்புச் சக்தி, வண்டியின் தடைக்குச் சமமாகும்.

$$\begin{aligned}
\therefore \text{அதன் அளவு} &= 300 \times 20 \\
&= 6000 \text{ பவு. நிறை} \\
\text{வேகம் 30 மைல்/மணி} &= 44 \text{ அடி/விநாடி} \\
\therefore \text{செய்யப்பட்ட வேலை} &= 6000 \times 44 \\
&= 264000 \\
\therefore \text{குதிரைத் திறன்} &= \frac{264000 \times 44}{558} \\
&= 420
\end{aligned}$$

14. 50-ல் 1 எண்ற சாப்புகள் ஒரு தளத்தில்மேல் டிரளூக்கு 20 பவு. நிறை அளவுள்ள தடைக்கு எதிராக 200 டன் நிறையுள்ள ஓர் இரயில் வண்டியை, மணிக்கு 60 மைல் சீரான வேகத்துடன் ஓட்டிச் செல்லும் எஞ்சினின் குதிரைத் திறனைக் கண்டுபிடி.

$$\begin{aligned}
\text{தடை} &= 200 \times 20 \\
&= 4000 \text{ பவு. நிறை}
\end{aligned}$$

கிரயில் வண்டியின் திறையில் கூறு சாய்தளத்தின் போக்கில்

$$\begin{aligned} &= 200 \times \frac{1}{50} \\ &= 4 \text{ டன்கள்} \\ &= 8960 \text{ பவு. திறை} \end{aligned}$$

வேகம் சீரானதால், எஞ்சினின் கிரூப்புச் சக்தி மிகக்கத்துக்குத் தடை, வண்டியின் திறையின் கூறு மிவைகளிலிருந்து சம்பளமும்.

$$\begin{aligned} \therefore \text{எஞ்சினின் கிரூப்புச் சக்தி} &= 8960 + 4000 \\ &= 12,960 \text{ பவு. திறை} \\ \text{வேகம்} &= 60 \text{ மைல்/மணி} \\ &= 88 \text{ அடி/விநாடி} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{விநாடியில் செல்லப்படும் வேலை} = 12,960 \times 88$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{குதிரைத் திறை} &= \frac{12960 \times 88}{550} \\ &= \frac{10368}{5} \\ &= 2073.6 \end{aligned}$$

15. 300 குதிரைத் திறையுள்ள ஒரு எஞ்சின் 200 டன் திறையுள்ள ஓர் கிரயில் வண்டியை 200-ல் 1 என்றவளவிலுள்ள, சாய்தளத்தின்மேல் கிரூத்துச் செலுத்திறது. அதற்கானத் தடை 1 டன் திறையுக்கு 5 பவு. அளவிலுள்ளது. சீரான அதிவட்ச வேகத்தைக் கண்டுபிடி.

விநாடிக்கு எஞ்சின் செல்லும் அதிவட்ச

$$\begin{aligned} \text{வேலை} &= 300 \times 550 \\ &= 165000 \text{ அடி பவு.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{மிகக்கத்துக்கு எதிரான தடையின் அளவு} &= 200 \times 5 \\ &= 1000 \text{ பவு. திறை} \end{aligned}$$

சாய்தளத்தின் போக்கில் வண்டியின்

$$\begin{aligned} \text{திறையின் கூறு} &= 200 \times \frac{1}{25} \times 2240 \\ &= 2240 \text{ பவு. திறை} \end{aligned}$$

வேகம் சீராக கிரூப்பதால், எஞ்சினின் கிரூப்புச் சக்தி, மிகக்கத்துக்கு எதிரான தடை, வண்டியின் திறையின் கூறு மிவைகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமம்.

$$\begin{aligned} \therefore \text{கிரூப்புச் சக்தி} &= 1000 + 2240 \\ &= 3240 \text{ பவு. திறை} \end{aligned}$$

வேகம் V அடி/விநாடி என்றால்

விநாடியில் செல்லும் வேலையின் அளவு = $3240 \times V$ அடி. படி.

$$\therefore 3240 V = 330 \times 550$$

$$V = \frac{330 \times 550}{3240}$$

$$= \frac{9075}{162} \text{ அடி/விநாடி}$$

$$= \frac{9075}{162} \times \frac{60}{88} = \frac{12375}{324}$$

$$= 38 \frac{63}{324} \text{ மைல்/மணி}$$

16. 40-ம் 1 என்றவளவிலுள்ள சாய்வளத்தில் கீழ்தோக்கி 5 டன் திறவுள்ள வண்டி, மணிக்கு 12 மைல் என்ற மாறில் வேகத்தில், தடையின்றி ஓடிக்கொண்டிருக்கிறது. கீழ்தோக்கிச் செல்லுவதற்குப் பதில், மேல்தோக்கிச் செல்லவேண்டுமானால், அதற்கான குதிரைத் திறனைக் கண்டுபிடி.

[கிரண்டு கிபக்கவியலும் உராய்வுத்தடை சமமனைக் கொள்க.]

வண்டியின் வேகம் மாறியிப்பாதலால், உராய்வுத் தடை = வண்டியின் திறையின் கூறு.

$$= 5 \times \frac{1}{40} = \frac{1}{8} \text{ டன் திறை}$$

$$= \frac{2240}{8} = 280 \text{ படி, திறை}$$

வண்டி மேல் செல்லும்போது, எஞ்சினின் கிழியுச் சக்தி

$$= 280 + 280 = 560 \text{ படி, திறை.}$$

வேகம் = 12 மைல்/மணி

$$= \frac{12 \times 88}{60}$$

$$= \frac{88}{5} \text{ அடி/விநாடி}$$

$$\therefore \text{விநாடியில் செல்லப்பட்ட வேலை} = 560 \times \frac{88}{5}$$

$$= 9856 \text{ அடி. படி.}$$

∴ குதிரைத் திரை

$$\begin{aligned} & 896 \\ & 9856 \\ & = \frac{558}{50} \\ & = 17.92 \end{aligned}$$

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. ஒரு பொருளின் மீது 10 விநாடிகள் வீடாக, 1 கிலோகிராம் திறையுள்ள ஒர் அழுத்தம் செலுத்தப்படுகிறது. அந்த நேரத்தில் பொருள் 10 மீட்டர் தூரம் நகருகிறது. பொருளின் திணிவு 49.05 கிராம்/சென்டிமீட்டர் கனம்.

2. 9 பவுண்ட் திறையுள்ள கிடைதிரையுள்ள ஒர் அழுத்தம், வழ வழப்பாகக் கிடைதிரைத் திரை நகரும்படி ஒரு பொருளின் மீது செலுத்தப்படுகிறது. 25 அடிகள் தூரம் நகர்த்தப்படுகிறது. பொருள் 10 அடி/விநாடிக் திரைவேகம் அடைகிறது. பொருளின் திணிவு 144 பவுண்ட்/சென்டிமீட்டர் கனம்.

3. 200 டன்கள் திணிவுள்ள ஒரு பொருளின் மீது 1,12,000 பவுண்ட் டன்கள் அளவுள்ள விசை செலுத்தப்படுகிறது. பொருள், மணிக்கு 30 மைல்கள் திரைவேகம் அடைய எவ்வளவு நேரம் பிடிக்குமெனக் கண்டுபிடி.

4. 10 பவுண்ட்/சென்டிமீட்டர் திணிவுள்ள ஒரு பொருள் 10 அடி உயரத்திலிருந்து நிலைதிரையில் விழுகிறது. பூமியிலுள்ள மணலில் 1 அடி தூரம் சென்று பொருள் ஓய்வடைகிறது. மணலின் மாநிலியான அழுத்தத்தைக் கண்டுபிடி.

5. விநாடிக்கு 200 அடிகள் திரைவேகத்துடன் நகரும் குண்டு ஒரு மாதிரித் தாக்கி, 9 அங்குல தூரம் செல்லுகிறது. அதே திரைவேகத்துடன் மற்றொரு குண்டு, 5 அங்குலக் கனமுகள்ள அதே மாதிரி மாதிரித் தாக்குகிறது. மாதிரித் தாக்குவதில் வெளி வரும்போது குண்டின் திரைவேகம் என்ன?

6. 12 பவுண்ட்/சென்டிமீட்டர் திணிவுள்ள ஒரு பொருளின் மீது, 6 பவுண்ட் திறையுள்ள விசை செலுத்தப்பட்டால், பொருளுக்குண்டாகும் முடுக்கத்தைக் கண்டுபிடி.

7. 100 டன்கள் திணிவுள்ள ஒரு பொருளின் மீது, 70 பவுண்ட் திறையுள்ள விசை செலுத்தப்பட்டால், பொருள் மணிக்கு 15 மைல் திரைவேகம் அடைய எவ்வளவு நேரம் பிடிக்குமெனக் கண்டுபிடி.

8. 112-க்கு 1 என்ற விதத்தில் சாய்த்திருக்கும் தளத்தில் சீழ் நோக்கி ஒரே சீரான திசைவேகத்துடன் ஓடும் ஒரு மேஸ்டார்வண்டி, மணிக்கு 10 மைல் திசைவேகத்துடன், சாய்தளத்தின் சீழே இருந்து நொடக்கி மேம்போக்கில் சென்றும், எவ்வளவு தூரம் ஓடி வண்டி நின்று மெனக் கண்டுபிடி.

9. 218 கிராம் திணிவுள்ள ஒரு பொருளின் மீது 10 கிராம் திறைக்குச் சமமான விசை, 5 செகண்டுகள் செலுத்தப்படுகிறது. பொருளில் உண்டாகும் திசைவேகம், 5 செகண்டுகளில் பொருள் நகரும் தூரம் கிடைக்கக் கண்டுபிடி.

10. ஓர் கிரயில் வண்டியின் இயக்கத்துக்குத் தடையான எதிர் விசை டன்யுக்கு 14 பவுண்ட் திறை என்ற விதத்திலுள்ளது. கிடை தளத்தில் மீது மணிக்கு 50 மைல் வேகத்தில் ஓடும் வண்டி, 150-ல் 1 என்ற சாய்வுள்ள தளத்தை வந்தடைகிறது. வந்தடைந்தவுடன் தீராய் திறுத்தப்பட்டால், சாய்தளத்தின்மேல் வண்டி எவ்வளவு தூரம் ஓடி நிற்கும்?

11. 150 பவுண்ட் திணிவுள்ள திறையை உடைய ஒரு மனிதன், 12 அடி/(விநாடி)² என்ற சீரான முடுக்கத்துடன் இயங்கும் மேல்தூக்கி வில்(lift)மேல் நிற்கிறான். மேல்தூக்கியின்மீது மனிதன் உண்டாகும் எதிர்விசையை (1) மேலே செல்லும்போது (2) சீழே செல்லும் போது கண்டுபிடி.

12. 160 டன்சுத் திணிவுள்ள ஓர் கிரயில்வண்டி, ஒரு நிலையி லிருந்து புறப்படுகிறது. எஞ்சின் இழுப்புச் சக்தி, அதன் போக்குக்குச் செய்யும் தடைபயலிட 2½ டன்சுத் விசை அளவுள்ளது. இந்த சாதக மான போக்குடன் வண்டி நகர்ந்து, மணிக்கு 37½ மைல் வேகமடை கிறது. இப்போது நித்தச் சீரான திசைவேகம் மாறாமல் கொஞ்சத் தூரம் ஓடுகிறது. கிள்வண்டியின் பிரேக்குகள் 2½ அடி/(விநாடி)² என்ற எதிர்முடுக்கத்தை உண்டாக்கி, 5 மைல்சுத் வண்டி ஓடி நிற்கிறது.

முடுக்கத்துடன் வண்டி ஓடும்போது ஆளும் நேரம், எதிர்முடுக்கத் துடன் ஓடும்போது ஆளும் நேரம், வண்டியின் மொத்த ஓட்டத்துக்கு ஆளும் நேரம் கிடைக்கக்கூடக் கண்டுபிடி.

13. நிலைநிலையில் நகரும் கிடைதளத்தின் மேல் ௩ பவுண்டுகள் திணிவுள்ள ஒரு பொருள் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. தளத்தின்மேல் பொருளின் அழுத்தம் ௩ பவுண்ட் திறைக்குச் சமமானால், கிடை தளத்தின் முடுக்கத்தைக் கண்டுபிடி.

14. நிலை திசையில் சீழே கிறங்கும் 9 பவுண்டுகள் திணிவுள்ள ஒரு பொருள், உராய்வற்ற கர்பெயின்மேல் செல்லும் ஒரு தூவின்மூலம்

6 பவுண்டுகள் திணிவுள்ள மந்தெரு பொருளை மேற்கோக்கி கிடுக்கிற்றது. கிரு பொருள்கள் சேர்த்த தொகுதியின் முடுக்கத் தையும், தூரின் கிழுவின்மைபும் கண்டுபிடி.

15. 3 பவுண்டுகள் திறையுள்ள கிரு திணிவுகள், உராய்வற்ற கப்பிவின்மேல் செல்லும் ஒரு தூரிலுள் சேர்க்கப்பட்டிருக்கின்றன. 3 பவுண்டு திறையுள்ள மூன்றுவது திணிவு, ஏதாவதொரு திறையின் மீது வைக்கப்படும்போது, கப்பியின் மேல் உள்ள அழுத்தத்தைக் கண்டுபிடி.

16. ஓர் உராய்வற்ற கப்பியின்மேல் கிரு தூரிகள் செல்லுகின்றன. அவைகள் கப்பியின் ஒரு பக்கத்தில் 3 பவு., 4 பவு. என்ற திணிவுகளைத் தாங்குகின்றன. மந்தெரு பக்கத்தில் 5 பவு., திணிவுள்ள ஒரே ஒரு பொருளைத் தாங்குகிறது. தூரிகளின் கிரு விசைகளையும், தொகுதியின் முடுக்கத்தையும் கண்டுபிடி.

17. உராய்வு சேறு $\sqrt{3}$ உடைய ஓர் உராய்வுகடைய கிடைதளத் திறுள்ள மெகனுயின்மீது ஓர் என்ற திணிவு வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. அதை 3ஓ திணிவுடன் சேர்க்கும் தூர், மெகனுயின் விளிம்பிலுள்ள கப்பியின்மேல் செல்லுகிறது. கிப்போது கியக்கத் தொடங்குகிறது. தொடங்கி 5 விநாடிகளில் தூர் அறுத்து போகிறது. ஓ மெகனுயின் மேல் நகர்த்து ஒய்வுறும் கிடத்திற்கும், ஓ முதலில் வைக்கப்பட்ட கிடத் திற்குமிடையே உள்ள தூரம் 96 அடிகள் என்று காண்பி.

18. ஒரே திணிவுள்ள 16 பத்துகள் ஒரு தூரில் மணிகளோடு சேர்க்கப்பட்டிருக்கின்றன. அவைகளில் $\sin 30^\circ$ கிடைதளத்தடன் $\sin 45^\circ$ கோணம் உண்டாக்கும் சாய்தளத்தின்மேல் வைக்கப் பட்டிருக்கின்றன. மந்தையை, சாய்தளத்தின் உச்சியிலிருந்து தொங்கு கின்றன. முதலில் முடுக்கம் $\frac{g}{2}$ என்றும், தளத்தின்மேல் உள்ள பத்துகள் எவ்வளவு?

19. கிடைதளத்தடன் 30° கோணம் உண்டாக்கும் வழவழப்பான சாய்தளத்தின்மேல் வைக்கப்பட்டிருக்கும் ௩ என்ற திணிவு, சாய்தளத்தின் மேலுள்ள கப்பிவின்மேல் செல்லும் தூரின் ஒரு முனைவிலுள்ள நிலைநிலையில் தொங்கும் ௩' திணிவிலுள் கிடுக்கப் படுகிறது.

தங்கு தடையின்மீது கீழே விழும் பொருளுக்கான முடுக்கத்தில் தாள்மில் ஒரு பங்குள்ள முடுக்கத்தடன் மேற்கண்ட தொகுதி நகரு மானும், $\frac{m}{m'}$ என்பதின் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

20. 120-ல் 1 என்ற சாய்வுள்ள தளத்தில் 200 டன் கன திணிவுள்ள மரபில் வண்டி கீழ்தோக்கி மணலிக்கு தாப்பது மைல் வேகத்தில் ஓடிக்கொண்டிருக்கிறது. 3 மைலில் வண்டியை நிறுத்துவதற்கான தடைவின் அளவு 539 டன் திறைக்குச் சமமெனக் காண்பி.

21. A உயரமும் l திளமும் உட்கு ஒரு சாய்தளத்தின்மேல் வைக்கப்பட்டிருக்கும் m திணிவு, தளத்தின் உச்சியிலுள்ள கப்பியின்மேல் செல்லும் தூலில் கட்டி நிலைநிலையில் தொங்கும் 'm' என்ற திணிவிற்குப் மேலே கிழுகப்படுகிறது. m திணிவுள்ள பொருள் $\left[\frac{m+m'}{m} \frac{Al}{K+1} \right]$ தூரம் நகர்ந்த பிறகு தூல் அழுத்தால், m திணிவு, தளத்தின் உச்சியை அடையும் என்று நிரூபி.

22. 20 கிராம், 30 கிராம் திறைகளுள்ள கிழ துகள்களைச் சேர்க்கும் ஒர் இலேசான தூல், உராய்வற்ற கப்பியின்மேல் செல்லுகிறது. (1) அமைவனின் பொது நுடுக்கம் (2) தூலின் கிழுகை (3) கப்பியின் மேல் அழுத்தம் கிடைக்கக் காட்டுகி.

23. வழவழப்பான கிடைநிலையிலுள்ள மேலையின்மீது வைக்கப்பட்டிருக்கும் 9 பவுண்டு திணிவைச் சேர்க்கும் தூல், மேலையின் விளிம்பிலுள்ள கப்பியின்மேல் சென்று 7 பவுண்டு திணிவைத் தடைவிலித்தித் தொங்கச் செய்யப்படி அமைந்திருக்கிறது. (1) அமைவனின் பொதுநுடுக்கம் (2) தூலின் கிழுகை (3) கப்பியின் மேல் அழுத்தம் கிடைக்கக் காட்டுகி.

24. 6 அடி உயரமுள்ள கிடைத்தளத்திலுள்ள ஒரு வழவழப்பான மேலையின் மீது, அதன் ஒரு விளிம்பிலிருந்து 18 அடி தூரத்தில் 5 பவுண்டு திணிவுள்ள பொருள் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது.

அந்த விளிம்பிலுள்ள 3 பவுண்டு திணிவுள்ள மற்றொரு பொருளை இத்தரப் பொருளுடன் 18 அடி திளமுள்ள இலேசான தூல் சேர்க்கிறது. விளிம்பிலுள்ள பொருளை இலேசாகத் தள்ளி, நிலைநிலையில் தொங்கும் படி செய்யால், அது பூமியைச் சென்றடைய எவ்வளவு நேரமாகும்? அதற்குப் பிறகு எவ்வளவு நேரம் கழித்து, 5 பவுண்டு திணிவுள்ள பொருள் விளிம்பை அடையும்?

25. 5 பவு. திணிவுள்ள ஒரு பொருள் உராய்வுள்ள ஒரு கிடைநிலையிலுள்ள மேலையின்மேல் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. அதைத் தடவியின்றித் தொங்கும் 3 பவு. திணிவுள்ள மற்றொரு பொருளுடன் ஒரு தூல் கிழுகுகிறது. மேலையின் மேலுள்ள பொருளுக்கும் மேலுக்குமிடையே உட்கு உராய்வுக் கெட்டு 3 எள்ளில் தூலின் கிழுகைகையைக் காட்டுகி.

25. கிடைதிறவுடல் 45° கோணம் உண்டாகும் சாய்தளத்தின் உராய்வுக் கெழு $\frac{1}{2}$. அதன்மேல் ஒரு துகள் நழுவுகிறது. ஏதாவது பொருள் சூழப்பட்டுத் தூரம் நகர்வதற்கான நேரம், அதே சாய்தளம் வழுவுறப்படுவதற்காக ஆகும் நேரத்தைப்போல் மீள்கூடு பங்கென திருபி.

27. 30° , 60° கோணங்களைவுடைய உராய்வுள்ள ஓர் ஆப்பின் உச்சியில் ஒரு கப்பி வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. கப்பியின் பக்கங்களின் மேல் பக்கத்துக்கு ஒன்றாக உள்ள 4 பவு, 12 பவு. நிறைகளைச் சேர்க்கும் கிவலான தூக் கப்பியின்மேல் செல்லுகிறது. உராய்வுக் கெழு $\frac{1}{2}$ என்றால், விவரம் முடுக்கத்தைக் காட்டுவிட.

28. ஒரு தூவின் துளியில் கட்டித் தடக்கலிந்தித் தொங்கும் W_1 நிறையுள்ள பொருள், கிடைதிறவுடலுள்ள மேனையின்மேல் W_2 நிறையுள்ள மற்றொரு பொருளுடன் தூவின்மூலம் சேர்க்கப் பட்டிருக்கிறது. மீள்கூடாவது பொருளுக்கும் மேலாகக் கிடைமேல் உள்ள உராய்வு கெழு $\frac{1}{2}$ ஆகும். மேனையின் விளிம்பிலுள்ள உராய் வினாள், நிலைநிலையில் தொங்கும் தூவின் கிழவிசை, கிடைதிறவுடலுள்ள தூவின் பாகத்தின் கிழவிசையைப்போல் 'n' மடங்காகும். முடுக்கத்தைவும் கிழவிசைகளின் அளவுகளையும் காட்டுவிட. கிடை திறவுடலுள்ள தூவின் பாகத்தின் கிழவிசை W_2 என்றால் W_1 -க்கும் W_2 -க்கு கிடைமேல் உள்ள எப்பத்தத்தைக் காட்டுவிட.

29. 12 பவு, 8 பவு. நிறையுள்ள கிரு கப்பிகளைச் சேர்க்கும் கிவலான தூக், அசையாத உராய்வுற்ற கப்பியின்மேல் செல்லுகிறது. முதல் கப்பியின்மேல் செல்லும் ஓர் கிவலான தூவின் துளிகளில் 3 பவு, 6 பவு. எடைகள் கட்டித் தொங்கவிடப்பட்டிருக்கின்றன. மீள்கூடாவது கப்பியின்மேல் செல்லும் தூவின் துளிகளில் 4 பவு, 2 பவு. எடையுள்ள கிரு பொருள்கள் தொங்குகின்றன. அசையாத கப்பியின்மேல் செல்லும் தூக் நல்லது ஒப்பித்து கிருக்கவேண்டுமானால் 'n'-ன் மதிப்பைக் காட்டுவிட. அப்போது அந்த தூவின் கிழவிசையையும் காட்டுவிட.

30. மேனையின் விளிம்பிலுள்ள அசையாத கப்பியின்மேல் செல்லும் தூவின் ஒரு துளியில் கட்டப்பட்டிருக்கும் M திணிவுள்ள ஒரு துகள் வரவழப்பான மேனையின்மேல் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. தூவின் மற்றொரு துளி 'n' திணிவுள்ள அசையும் கப்பியின் அடியில் சென்று ஓர் ஆணியில் கட்டப்பட்டிருக்கிறது. அசையும் கப்பி, $\frac{mg}{M+n}$ என்ற முடுக்கத்துடன் கீழே நகருகிறது என்று திருபி.

[மேலாகக் கெழு வெளியே உள்ள தூவின் பாகங்களை நிலைநிலையில் உள்ளன எனக் கொள்.]

31. A என்ற புள்ளியில் கட்டப்பட்டிருக்கும் ஒரு தூல் $2W$ நிறை வயத் தாங்கிக் கொண்டிருக்கும் அசையும் கம்பியின் அடி வழியாகச் சென்று பிறகு C என்ற அசையாத கம்பியின்மேல் சென்று, W' என்ற நிறையை அதன் துளியில் கட்டித் தொங்கிக் கொண்டிருக்கிறது. கம்பி ஹெட்ஸ் சம்பந்தப்படாத தூலின் பாகங்கள் எல்லாம் நிலை நிறையில் உள்ளன என்று கொண்டால், மொத்தத் தொகுதியின் மூடுக்கத்தைக் கண்டுபிடி.

[கம்பிகளின் உராய்வுகள், திணிவுகள் மிகையகளைத் தவிர்த்து தோக்குக.]

32. மேற்கண்ட கணக்கில் $2W$ நிறை நியூட்டன் மூடுக்கத்தைக் கண்டுபிடி.

33. M திணிவும், α கோணமூல்கள் ஓர் ஆப்பு, கிடைதிரை யில் உராய்வுள்ள ஒரு மேசையின்மேல் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. உராய்வுக் கெழு μ ஆகும். ஆப்பின் ஒரு சாய்தளத்தின்மேல் n திணிவுள்ள ஓர் உராய்வற்ற துகள் உள்ளது. ஆப்பு நகரும் மூடுக்கம்,

$$\frac{n \cos \alpha [\sin \alpha - \mu \cos \alpha] - \mu M}{n \sin \alpha [\sin \alpha - \mu \cos \alpha] + M} g \text{ என்று திருபி.}$$

34. வழுவுறுப்பான மேசையின்மேல் வைக்கப்பட்டிருக்கும் n திணிவுள்ள பொருளைக் கட்டியிருக்கும் தூல், மேசையின் விளிம்பைத் தாண்டி, M திணிவுள்ள ஒரு கம்பியைத் தாங்கி, மேசையின் உயரத்தி லுள்ள அசையாத உராய்வற்ற கம்பியின்மேல் சென்று, n' திணிவுள்ள மற்றொரு பொருளை நிலைநிறையில் தடையின்றித் தொங்கவிடுகின்றது. தூலின் கிழவிகையைக் கண்டுபிடி. n' ஒய்வுற்று கிழக்க

$$M = \frac{4nn'}{2n - n'} \text{ என்று திருபி.}$$

35. α கோணமூல்கள் வழுவுறுப்பான சாய்தளத்தின்மேல் α கோணமும், M திணிவுமுள்ள ஓர் ஆப்பு வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. அப்போது ஆப்பின் மேல்பாகம் கிடைதிரையிலுள்ளது. அதற்கு கிடை திரையிலுள்ள பாகத்தின்மேல் n திணிவுள்ள ஒரு துகள் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. துகளின் விளைவு மூடுக்கம் $\frac{(M+n)g \sin^2 \alpha}{M+n \sin^2 \alpha}$ என்று காணி.

36. α கோணமும், M திணிவுமுள்ள ஓர் ஆப்பின் ஒரு பக்கம் வழுவுறுப்பான கிடைதிரையிலுள்ள மேசையின்மேல் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. n திணிவுள்ள துகள் ஆப்பின் சாய்தளத்தில் வைக்கப்பட்டு நழுவுகிறது. இப்போது ஆப்பு நகராமலிருக்க $\frac{1}{2} n g \sin 2\alpha$ என்ற கிடை

நிகை விசாரணை ஆரம்பிக்கும்பேல் செலுத்தவேண்டுமென திருபி. மேலும் ஆப்புகளும் மேனாக்குவிடையே உட்கன எதிர்ப்பினை $(M + n \text{ ரூபீட்சு})$ என்டும் திருபி.

37. வீட்டின் கூரையில் கட்டப்பட்டிருக்கும் ஒரு தூல் n தினிவுகள் ஒரு கப்பியின் அடியில் சென்று, கூரையிலுள்ள அகையாத மற்றொரு கப்பியின்மேல் சென்று, நடக்கவியிதி நிலைநிலையின் தொகையும் n' தினிவுகள் ஒரு பொருளைத் தாங்கி திக்கும். தொகையும் தூயின் பாகங்கள் எல்லாம் நிலைநிலையிலேயே இருக்குமெனக் கொண்டு, n' தினிவின்மேல் நேரக்கிய முடுக்கம் $\frac{2(n-2n')}{n+4n'}$ g எனக் கான்பி.

38. k கோணமும் M தினிவுவுள்ள ஓர் ஆப்பு ஸமுபமுப்பான கிடை நிலையிலுள்ள மேகையின்மேல் இருக்கிறது. n தினிவுகள் ஒரு பொருளை ஆர்பின் பக்கத்தின்மேல் கிலேசாக வைத்து நடுவவிலையும். அந்தப் பொருள் ' k ' நிலைதூரம் நகரும்போது, ஆப்பு $\frac{n \sin \alpha}{n+M}$ கிடை தூரம் நகருமென திருபி.

39. எஞ்சின், அது இருக்கும் பொருள் நிலையகளின் திறை 10 டன்கள் என்றும், உராய்வு முதவியவற்றில் ஏற்படும் தடைபின் அளவு 10 பவு. என்றும் உட்கன ஓர் எஞ்சின் 100-ல் 1 என்ற அளவிதூள்ள சாய்நகத்தின்மேல் மணிக்கு 25 மைல் வேகத்தில் ஓடுகிறது, எஞ்சினின் குதிரைத் திறனைக் காட்டுபிடி.

40. 2000 பவு. அளவுள்ள நகைக்கு எதிராக மணிக்கு 40 மைல் வேகத்தில் ஓடும் ஓர் கிரயில் எஞ்சினின் குதிரைத் திறனைக் காட்டுபிடி.

41. நீட்டக்கூடிய ஒரு தூலை, விசையின் அளவை அதிகரித்து, திதானமாக நீட்டவும். 2 அங்குலம் நீட்டியவுடன் அதன் கியூவிசை 10 பவு. திறைக்குச் சமமாகிறது. தூலை நீட்டுவதற்கான வேலையின் அளவேன்ன?

42. விநாடிக்கு 5 வீட்டர் திசைவேகத்தடன் செலுத்தப்படும் 10,000 கிராம்கள் திறையுள்ள குண்டின் விபக்கத்திறைக் காட்டுபிடி.

43. 100, நகர்கு பவுண்ட் குண்டுகளை விநாடிக்கு 1200 அடிகள் திசைவேகத்தடன் ஒரு நிமிடம் செலுத்தும் குப்பாக்கியின் குதிரைத் திறனைக் காட்டுபிடி.

44. 60 டன்கள் திறையுள்ள ஓர் கிரயில் வண்டி கிடை திசையின் ஓடக்கொண்டிருக்கிறது. விபக்கத்துக்குத் தடைபான விசை டன் ஹுக்கு 10 பவு. அளவிலிருக்கும் எஞ்சின் மாதிரி விசையைச் செலுத்

தும். கிளம்பிய 3 நிமிடங்களில், மணிக்கு 20 மைல்கள் திசைவேகம் உண்டாக வேண்டுமானாலும், எஞ்சினின் குதிரைத் திறனைக் கண்டுபிடி.

45. 400 அடி உயரத்திலிருந்து தடைபிள்தி விழும்போது உண்டாகும் திசைவேகத்துடன் மழை மிதங்கூவதாகக்கொண்டு, 24 மணி நேரத்தில் 3 அங்குல மழை பெய்வதாகத் தகவர்க்கு உண்டாகும் அழுத் தத்தை ஏக்கருக்கு எவ்வளவு பவுண்டுகள் என்று கண்டுபிடி.

46. ௩ பவு. திணிவுள்ள ஓர் கிரயில் வண்டி தனது நிறையப் போல் ௩ மடங்குக்குச் சமமான எதிர்முடுக்கத்துடன் மிதக்கி, ஒயிலிலிருந்து சீரான முடுக்கத்துடன் ஓடின பின், நீராவி நிறுத்தப்படுகிறது. புறப்பட்ட மீடத்திலிருந்து 'a' அடிகள் தூரத்திலுள்ள கிரயில் நின்று நின்ற 't' விநாடிகளில் சென்றடைகிறது. எஞ்சினின் மிக அதிக குதிரைத் திறன் $\frac{2mk^2ga}{550(kg^2-2a)}$ என்று திருபி.

47. H குதிரைத் திறனுள்ள ஓர் எஞ்சின் M டிகுகள் நிறையுள்ள கிரயில் வண்டியை ௩-ம் 1 என்ற வீதத்திலுள்ள சாய்தளத்தின்மேல் கிழித்துச் செல்லுகிறது. அதன் மிதக்கத்திறனை தடைபிள அளவு, டன்னுக்கு n பவு. நிறைக்குச் சமமானும், வண்டியின் அதிவாட்ச வேகம் $\frac{550Hm}{m(2240+mn)}$ அடி/விநாடியெனக் காண்பி.

48. M திணிவுள்ள ஒரு பொருள் 'a' அடிகள் தடைபிள்தி நின்று திசையில் விழுந்து பின், அதை அகையாத கப்பலின்மேல் செல்லும் தீட்டியைத் தூவின்மூலம் தவிர்வைத்து அதிகமான திணிவுள்ள M என்ற மத்தொரு பொருளை மேலே கிழிக்கத் தொடங்குகிறது.

$\frac{2M}{M'-M}\sqrt{\frac{2a}{g}}$ நேரத்தின் முடியில் M' பொருள் தனது பழைய மீடத்தையடைகிறதெனக் காண்பி.

49. சிறு கப்பலின்மேல் செல்லும் தூவின்மூலம், கீழே கிறங்கிக் கொண்டிருக்கும் m_1 என்ற திணிவு, m_2 என்ற திணிவை மேலே கிழிக்கிறது. மீட்படி 10 விநாடிகள் மிதப்பி பின், m_2 என்ற திணிவின் மேல், m_3 என்ற திணிவுள்ள பொருள் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. 20 விநாடிகளில் M_2 திணிவு தரும் மொத்தத் தூரத்தைக் கண்டுபிடி.

50. கிடைதிரைப்புடன் $\tan^{-1}(\frac{1}{2})$ கோணமுள்ள ஓர் உராய்வுள்ள சாய்தளத்தின் மேலுள்ள 20 பவு. திணிவு ஒயிலிலிருந்து ஆரம்பித்து 100 அடிகள் நகருகிறது. தளத்தின் உராய்வு செலு 0.25 ஆகும். திணிவின்மேல் மிதக்கும் விசைகள் செய்யும் வேலையை அடி பவுண்டுகளில் கண்டுபிடி. திணிவு அடையும் திசைவேகத்தையும் கண்டுபிடி.

51. 30,000 ரூபாய்த் திறன் பொருத்திய எஞ்சின் கொண்ட 30,000 டன் எடையுள்ள ஒரு கப்பல் மணிக்கு 15 மைல் வேகத்தில் சென்று கொண்டிருக்கிறது. கப்பலின் போக்குத் தடையின் அளவை டன்ளுக்கு எவ்வளவு என்று கண்டுபிடி.

52. 90 டன் நிறையுள்ள 896 ரூபாய்த் திறனுமுள்ள ஓர் எஞ்சின் 120 டன் நிறையுள்ள கிரயில் வண்டியை 84-ல் 1 என்ற வீதத்திலுள்ள சாய்வுகளின்மேல் இழுத்துச் செல்லுகிறது. உராய்வுத் தடை டன் லுக்கு 80 பவு. என்ற அளவிலுள்ளது. வண்டி சாய்வுகளின்மேல் ஓடும் சீரான அதிவட்சத் திசை வேகத்தைக் கண்டுபிடி.

53. 2½ டன் நிறையுள்ள ஒரு வண்டி 50-ல் 1 என்ற வீதத்திலுள்ள சாய்வுகளின்மேல் 2 அடி/(விநாடி)² என்ற முடுக்கத்துடன் ஓடுகிறது. அதன் மிகக்கூடுக்கு எதிரான தடை டன்ளுக்கு 30 பவு. நிறை என்ற அளவிலுள்ளது. வேகம் மணிக்கு 20 மைல் என்று இருக்கும்போது, வண்டியின் ரூபாய்த் திறன் என்ன?

54. 'E' என்ற மிகக்கூடுதலுடன் ஒரு துகள், 'e' சாய்கோணம், $\frac{E}{\mu \cos \alpha}$ உராய்வு செழு எல்லுள்ள சாய்வுகளின்மேல் மிதக்கிறது. துகள் திற்பதற்கு முன்னால் உராய்வு எதிராகச் செல்லும் வேகம் $\sin \alpha + \mu \cos \alpha$ என்று திருபி. துகள் திசையின், நகராமலிருப்பதற்கான திசை என்ன?

55. கிரயில் திசையத்திலிருந்து ½ மைல் தூரம் இருக்கும்போது, மணிக்கு 30 மைல் வேகத்தில் ஓடிக்கொண்டிருக்கும் கிரயில் வண்டி திறத்தப்படுகிறது. வண்டியின் நிறையில் ½ பங்கு அளவுள்ள சீரான தடையினால் திசையத்திற்கு வந்து வண்டி திற்கிறது. மேல் கண்ட தடையுடன், வண்டியின் நிறையில் ½ பங்கு அளவுள்ள சீரான பிரேக் செலுத்த முடிந்தால், கிரயில் திசையத்திற்கு எவ்வளவு தூரம் முன்னால் பிரேக்கைச் செலுத்தினால் வண்டி திசையத்தின் வந்து திறும்?

56. 250 டன் நிறையுள்ள ஓர் கிரயில் வண்டியை டன்ளுக்கு 12 பவு. நிறை அளவிலுள்ள தடைக்கு எதிராக மணிக்கு 35 மைல் வேகத்தில் அதன் எஞ்சின் இழுத்துச்செல்ல முடியும். அதே வேகத்தில் 160-ல் 1 என்ற சாய்வுகளின்மேல் இழுத்துச் செல்லுவதற்கான எஞ்சினின் ரூபாய்த் திறனைக் கண்டுபிடி.

57. ஒப்பிலுள்ள 30 பவு. திசையின்மேல் 5 பவு. நிறைக்குச் சமமான லைஸ் 10 விநாடிகள் செயல்படுகிறது. திணிவு நகரும் தூரம், அது பிறப்பிக்கும் மிகக்கூடுதலின் அளவு மிகவகளைக் கண்டுபிடி.

58. 120-ல் 1 என்ற சாய்வளத்தின்மேல் 300 திணிவுள்ள ஒர் இரயில் வண்டி 0.5 அடி/(விநாடி)² என்ற முடுக்கத்துடன் செல்லுகிறது. மணிக்கு 15 மைல் வேகத்தில் ஏற்படும் குதிவளத்திற்கு 1225 என்றால், பூமியின் எதிர்புச் சக்தியைத் தவிர்த்து, வண்டியின் நியோகத்துக்கு எதிரான தடைபின் அளவைக் கண்டுபிடி.

59. 10% சாய்வளத் தளத்தின்மேல் 2 டன் நிறையுள்ள ஒரு வண்டி 1½ அடி/(விநாடி)² முடுக்கத்துடன் நியோகிக்கொண்டிருக்கிறது. அந்த நியோகத்திற்கு எதிரான தடை டன்னுக்கு 35 படி. நிறை என்ற அளவி ளுள்ளது. வண்டி மணிக்கு 25 மைல் வேகத்தில் ஓடிக்கொண்டிருக்கும் போது, அதன் குதிவளத்தின் என்ன?

60. 600 குதிவளத் திறனுள்ள ஒர் எஞ்சின் 250 டன் நிறையுள்ள ஒர் இரயில் வண்டியை டன்னுக்கு 16 படி. நிறை அளவிலுள்ள தடைவையுப் மீறி, கிடைதளத்தில் இழுத்துச் செல்லுகிறது. மணிக்கு 30 மைல் வேகத்தில் வண்டி செல்லும்போது அதன் முடுக்கம் என்ன? அதே குதிவளத் திறனுடன், அதே அளவுத் தடைவையுப் மீறி 100-ல் 1 என்ற சாய்வளத்தின்மேல் செல்லும் இரயில் வண்டியின் சீரான வேகத் தைக் கண்டுபிடி.

5. எறிபொருள்கள் (Projectiles)

1. **மூன்றுரை :** சென்ற அத்தியாயங்களில் நேர்க்கோடுகளில் அமைவும் வியக்கவகிப்பற்றி நாம் ஆராய்ந்தோம். உதாரணமாக, துகள் திசைக்குத்தாக மேலே எறியப்படும்போதோ அல்லது, சாய்தளத் திசைமேல் அதன் மிக அதிகச் சரிவிறுக்க நேர்க்கோட்டில் போக்கில் எறியப்படும்போதோ, நேர்க்கோடுகளில் வியக்கம் அமைவிறது. ஆனால், இந்த அத்தியாயத்தில், திசைவேகம் எந்தத் திசையிலும் அமைவும் படி துகள் காற்றில் எறியப்பட்டாலும், அதன் வியக்கத்தை நாம் கவனிப்போம். இப்படிப்பட்ட துகளை எறிபொருள் எனலாம். எறி பொருளின்மேல் வியக்கும் விசைகள் அதன் திசையும், காற்றின் தடைபுனரும்.

நாம் ஆராயும் எறிபொருள் பூமியின் மேற்பரப்புக்கு வெளியே அதிகத் தூரம் செல்வதவாறு எடுத்துக்கொள்கோம். அப்போது புவிசர்ப்புறம் ஏற்படும் மூடுக்கம் ஏறக்குறைய மாதிரியாக கிருக்கு மென எடுத்துக்கொள்ளலாம். மேலும் காற்றின் தடையைத் தவிர்த்து வெற்றிடத்தில் வியக்கம் நிகடுவதாகக் கொள்ளோம்.

2. **வரையறைகள் :** (1) **விச்சக்கோணம் (Angle of Projection):** விச்சப் புள்ளியின் வடுவாக வரையப்படும் கிடை சமதளத் துடன் (Horizontal plane) துகள் மூதலாவதாக எறியப்படும் திசை உடனடாக்கும் கோணத்தை விச்சக் கோணம் என்கிறோம்.

(2) **எறிபொருளின் பாதை (Trajectory):** துகள் எறியப்படும் போது அதன் வியக்கும் பாதையை எறிபொருளின் பாதை எனலாம்.

(3) **விச்சத் திசைவேகம் (Velocity of Projection)** என்பது துகள் எறியப்படும் திசைவேகத்தைக் குறிக்கும்.

(4) வீச்செல்லை (Range): வீச்சுப்புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் சமதளத்தின் மீது வீச்செல்லை என்பது, வீச்சுப்புள்ளிக்கும், எறி பொருள் பாதை, மீண்டும் சமதளத்தைச் சேர்ந்திருக்கும் புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தூரமேயாகும்.

(5) பறக்கும் நேரம் (Time of Flight): எறியும் கணத்திலிருந்து, வீச்சுப்புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் சமதளத்தை துள் மீண்டும் சேர்ந்திருக்கும்வரை உள்ள நேர இடைவெளியே, பறக்கும் நேரமாகும்.

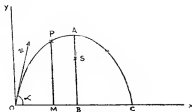
குறிப்பு: பூமி தளப்பக்கம் துணி எதிர்வழியிலிருந்தால், கார்த்தி எறிவப்படும் துண், நேர்த்தோட்டும் மேல்நோக்கியே செல்லும். ஆனால், பூமியின் எதிர்வழி சேர்ந்திருக்கும் உண்டாகும் கீழ்முகம் (Downward) முடுக்கமே, துணி விரைகோட்டுப் பாதையில் நகரச்செய்கிறது. அந்த விரைகோட்டுப்பாதை ஒரு பரவளையே என்பதை கீழ்க்காட்டி விவரிப்போம்.

முதலில் எறிபொருளின் வினாக்கத்தைப்பற்றி ஆராயப் புகும்போது, வினாக்கத்தின் கிடைநிலை (Vertical) கூறுகளைப் பிடித்து நோக்குவோம். எறிபொருளின்மேல் வினாக்கும் ஒரே விசை, பூமியின் எதிர்வழி சேர்ந்திருப்பதும், இந்த விசை கீழ்முக நிலையிலே வினாக்கும். எனவே, விசைகளின் பொதுக் காரை கொடுக்கப்படி பூமியின் எதிர்வழி சேர்ந்திருக்கும் கிடைவினாக்கத்தில் ஒரு தளையுள் உண்டாகும் விவரம், ஆகவே எறிபொருள் வினாக்கம் முழுமையிலும் கிடைநிலை வேகம் ஒரு மாநிலமாக இருக்கும். ஆனால் துளின் நிறை, கீழ்முக நிலையில் வினாக்குவதால், துளின் நிலைவினாக்கத்தில் அதற்கு முழுப் பங்குண்டு. 'm' துளியுள்ள ஒரு துளில், கீழ்முக நிலையில், 'mg' என்ற நிறை வினாக்கும்போது அது கீழ்முக நிலையில் 'g' என்ற முடுக்கத்தை உண்டாக்குகிறது. எனவே, துளைவேகத்தில் நிலைகூறு, 'g' என்ற எதிர்முடுக்கத்துக்குக் கட்டுப்பாட்டிலும்.

3. நேற்றும்: எறிபொருளின் பாதை (வெற்றிடத்தில்) ஒரு பரவளைய (Parabolic) வளை திருபி.

முதல் நிறுவல்: கிடைநிலைத் துண் 'x' என்ற கோணம் உண்டாகும் வளைவில் துண் 'O'-யிலிருந்து, 'U' என்ற துளைவேகத்துடன் எறிவப்பட்டும். O இல் ஆதிபாசமும் O-ன் வழியாக வரையப்படும் கிடை, நிலைநிலை OX, OY என்றும் எடுத்துக்கொள்ள.

'U' என்ற துளைவேகத்தை, கிடைநிலையில் U cos α என்றும் நிலைநிலையில் U sin α என்றும் கூறுபோடுக. எனவே கிடை கூறு



படம் 55.

' $U \cos \alpha$ ' திசைவேகம், நீபக்கம் முழுமையிலும் மாறாமல் இருக்கும். ஆனால் திசைவேகம் ' $U \sin \alpha$ ' திசைவேகம், சிதறும் முடுக்கமான ' g '-க்குக் கட்டுப்பாட்டிற்குக்கும்.

எதிர் திசையிலிருந்து ' t ' விநாடிகள் கழித்துத் துண் $P(x, y)$ என்ற கிடைதில் இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

$$\begin{aligned} x &= 't' \text{ விநாடிகளில் துண் சென்ற கிடைதூரம்} \\ &= U \cos \alpha \cdot t \end{aligned} \quad \dots (1)$$

$$\begin{aligned} y &= t \text{ விநாடிகளில் துண் சென்ற நிழல்தூரம்} \\ &= U \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \quad \dots (2)$$

(1), (2) என்ற இரு சமன்பாடுகளை எதிரொருக் பாதையில் துணையாக சமன்பாடுகளைக் கொள்ளலாம். அல்லது (1), (2) சமன்பாடுகளிலிருந்து ' t ' ஐ நீக்கவும்.

$$t = \frac{x}{U \cos \alpha}$$

$$\therefore y = U \sin \alpha \cdot \frac{x}{U \cos \alpha} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{U^2 \cos^2 \alpha}$$

$$\therefore y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 U^2 \cos^2 \alpha}$$

$$\frac{2 U^2 \cos^2 \alpha}{g} y = \frac{2 U^2 \cos^2 \alpha \tan \alpha}{g} x - x^2$$

$$\therefore \left[x - \frac{U^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \right]^2 = \frac{U^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{g^2}$$

$$= - \frac{2U^2 \cos^2 \alpha}{g} y$$

$$\therefore \left[x - \frac{U^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \right]^2 = - \frac{2U^2 \cos^2 \alpha}{g} \left[y - \frac{U^2 \sin^2 \alpha}{2g} \right]$$

$$\left[\frac{U^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}, \frac{U^2 \sin^2 \alpha}{2g} \right] \text{ என்ற புள்ளிக்கு ஆதியை மாற்றுக.}$$

$$X^2 = - \frac{2U^2 \cos^2 \alpha}{g} Y$$

இது ஒரு பரவளையில் சமன்பாட்டையே குறிக்கும். பரவளையில் உச்சியின் அச்ச தூரங்கள் $\left[\frac{U^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}, \frac{U^2 \sin^2 \alpha}{2g} \right]$ ஆகும்.

$$\text{அதன் செவ்வகம்} = \frac{2U^2 \cos^2 \alpha}{g}$$

செவ்வகத்தின் குறி ‘-’ ஆக இருப்பதால், பரவளையின் அச்ச நிலைகளும் கீழ்முகமாகவும் உள்ளது.

குறிப்பு 1 : பரவளையின் செவ்வகம் (Latus Rectum)

$$= \frac{2U^2 \cos^2 \alpha}{g}$$

$$= \frac{2}{g} (U \cos \alpha)^2$$

$$= \frac{2}{g} [\text{மிடத்தின் வேகத்தின் வர்க்கம்}]$$

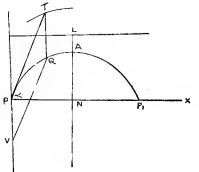
எனவே, பரவளையின் செவ்வகம், அதாவது பரவளையின் பருமன் ஆரம்பத் திசையேகத்தின் கிடைக்கற்றை மட்டும் பொறுத்திருக்கிறது. திசைக்கற்றை திசையேகம் செவ்வகத்தைப் பாதிக்காதென்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

குறிப்பு 2 : $SB = AB - AS$

$$= \frac{U^2 \sin^2 \alpha}{2g} - \frac{U^2 \cos^2 \alpha}{2g} = - \frac{U^2 \cos 2\alpha}{2g}$$

$\therefore \alpha < 45^\circ$, குவியம் OX-க்கு கீழே அமையும்.

பிழுவல் (2)



படம் 56.

P என்பதை எதிர்வெக்டராகவும், 'U' ஐ எதிர்வினை வேகமாகவும் 'α' ஐ எதிர்வேகமாகவும் கொள்க.

$\alpha = \angle XPT$ ஆகும்.

புள்ளியின் இயக்கம், PT-யின் வழியாக வரையப்படும் நிலை சம தளத்திற்கான நடக்கவேண்டும். ஏனென்றால் துகளின்மேல் இயங்கும் ஒரே விசையான நிறை இந்தச் சமதளத்திலேயே இயங்குகிறது.

துகள் எதிர்ப்பட்டு 't' விநாடிகள் கழித்து அதன் நிலையை அளாய்வோம். எதிர்ப்பு திசையில் $PT = Ut$ என்ற அளவில் Tஐக் குறிக்க. $\frac{1}{2}gt^2$ மட்டமான நிலை கிழ்முகத்தில் TQ என்ற நேர்க்கோட்டை வரைக. எனவே 't' விநாடிகள் கழித்துத் துகள் 'Q' என்ற புள்ளியில் இருக்கும்.

PT-க்கு இணையாக QV என்ற நேர்க்கோட்டை வரைக. அது 'P'-ல் வரையப்படும் நிலைகோட்டை 'V' என்ற புள்ளியில் சந்திக்கப்படும்.

$$\text{எனவே } VQ = PT$$

$$= Ut$$

$$VP = Qt$$

$$= \frac{1}{2}gt^2$$

ஆகவே 't' -ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்

$$QV^2 = U^2t^2$$

$$= U^2 \cdot \frac{2VP}{g}$$

$$= \frac{2U^2}{g} \cdot PV$$

ஆதலால் PV^2 விட்டமாகக் கொண்டு வரையப்பட்ட பரவளைவு PT^2 P -ல் தொடங்கி, அதன் குவியம் (focus) S என்பது $4SP = \frac{2U^2}{g}$ என்ற முறையில் அமைக்கும். எனவே, Q இந்த பரவளைவில் மேலே இருக்கும்.

3-1. எறிபொருள் இயக்கத்தின் சிறப்புகள் : பக்கத்திலுள்ள 55 வரைபடத்தில் 'A' எறிபொருளின் பாதையிலுள்ள அதி உயரமான புள்ளியாகும். பாதையை மீண்டும் 'O'ல் வழியாக வரையப்படும் கிடை சமதளத்தைச் சேர்க்கும் புள்ளி 'C' ஆகும்.

(1) எறிபொருள் அடையும் மீள்பெரு உயரம் : உயரமான புள்ளியான 'A'-ல் துவக்கி கிடைநிலையில் இயங்குகிறது. எனவே, அதற்கு நிரந்தர வேகம் இல்லை யெனலாம்.

$$AB = h \text{ என்றால்}$$

$$0 - (U \sin \alpha)^2 = -2gh$$

$$\frac{U^2 \sin^2 \alpha}{2g} = h$$

எனவே பரவளைவில் உச்சியே, எறிபாதையில் அதி உயரமான புள்ளியாகும்.

(2) அதி உயரமான புள்ளியை அடைய எறிபொருள் எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம்

$$0 = U \sin \alpha - gt$$

$$\therefore t = \frac{U \sin \alpha}{g}$$

(3) பறக்கும் நேரம்: துகள் 'O' என்ற புள்ளியிலிருந்து தொடங்கி 'C' என்ற புள்ளிக்கு வந்து சேரும்போது, அது நிறை திசையில் 'O' (பூச்சியம்) தூரமே இயங்கி இருக்கிறது. ஆகவே நிறை இயக்கத்தைப் பொறுத்தவரை

$$0 = (U \sin \alpha) t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\therefore t = 0 \text{ அல்லது } t = \frac{2U \sin \alpha}{g}$$

குறிப்பு: பறக்கும் நேரம், அதி உயரமான புள்ளியை அடைவ எடுத்துக்கொள்ளும் நேரத்தைப்போல் கிடைத்து பக்சென்பதைக் கவனிக்க.

(4) வீச்சுபுள்ளியின் வழியாக வரையப்படும் கிடை சம தளத்தில் வீச்செக்டர்: பறக்கும் நேரம் $\frac{2U \sin \alpha}{g}$ எனக் கொண்டால், இந்த நேரத்தில் கிடைதிசை வேகம் ஒரு மாநிலியாக ' $U \cos \alpha$ ' என்ற மதிப்புடன் உள்ளது.

$$\begin{aligned} \text{எனவே } OC &= U \cos \alpha \cdot t \\ &= \frac{U \cos \alpha \cdot 2U \sin \alpha}{g} \\ &= \frac{2U^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \end{aligned}$$

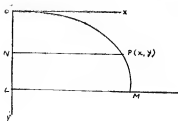
$$\begin{aligned} \text{ஆகவே கிடை வீச்செக்டர்} &= \frac{2U^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \\ &= \frac{U^2 \sin 2\alpha}{g} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{கிடை வீச்செக்டர்} &= \frac{2(U \cos \alpha)(U \sin \alpha)}{g} \\ &= \frac{2U' V'}{g} \end{aligned}$$

[இங்கு U' , V' என்பவை முறையே முதல் திசையெக்டரின் கிடை, நிறை கூறுகளாகும்.]

4. நேற்றம்

தளமிலிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட உயரத்திலிருந்து துகள் கிடை திசையில் எறியப்படுவதாகக் கொண்டால், துகளின் பாதை ஒரு பரவளைவு எனக் காண்போம்.



படம் 57.

LM எதிர்ப்புத் தாக்கம் தரையைக் குறிப்பதாகக் கொள்ளுவோம். அதிலிருந்து 'h' உயரத்திலுள்ள O என்ற புள்ளியிலிருந்து துகள் கிடைதிறையில் 'U' ஆரம்ப வேகத்துடன் எதிர்ப்புத் தாக்கம் கொள்ளுவோம். கிடைதிறையை x அச்சு OX ஆகவும் கீழ்க்குறி நிலை அச்சை OY ஆகவும் கொள்வோம்.

't' நேரத்தில் துகள் $P(x, y)$ என்ற புள்ளியிலிருப்பதாகக் கொள்வோம். கிடைதிறைக்கு நிகர்ப்புத் தாக்கம் கிடைதிறை வேகம் மாறு திருக்கிறது.

$$\begin{aligned} \text{எனவே } x_p &= NP \\ &= 't' \text{ நேரத்தில் துகள் நகரும் கிடைதூரம்} \\ &= Ut \end{aligned} \quad \text{.....(1)}$$

புள்ளியின் வீழ்ப்புத் தாக்கத்திலிருந்து, துகள் நகரும்போது நிலைதிறைக்கு 'g' கீழ்க்குறி நிலைதிறை வேகம் நிகர்ப்புத் தாக்கம்

$$\begin{aligned} y_p &= ON \\ &= 't' \text{ நேரத்தில் துகள் நகரும் நிலைதூரம்} \\ &= \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \quad \text{.....(2)}$$

(1), (2) சமன்பாடுகளிலிருந்து 't'ஐ நீக்கினால்

$$\begin{aligned} y &= \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{U^2} \\ x^2 &= \frac{2U^2}{g} \cdot y \end{aligned} \quad \text{.....(3)}$$

(3) - எவ்வாறு ஒரு பரவலைக் குறிக்கும். அந்தப் பரவலின் வீச்சு உச்சி O ஆகவும், அச்சு ON ஆகவும் அமையும்.

5. தேற்றம்

வீச்சு திசை வேகத்தின் அளவு கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது, எதிரொள்களின் கிடை வீச்செகிலை எப்போது உச்சத்திலுள்ள நென்று காண்பிக்கும்.

ஆரம்பத் திசைவேகம் 'U' எனவும், வீச்சுக் கோணம் 'α' எனவும் கொண்டால், வீச்சுப்புள்ளியின் வழியாக வரையப்படும் கிடை சமதளத்தின்மேல் வீச்செகிலை 'R' எனலாம்.

$$R = \frac{2U^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{U^2 \sin 2\alpha}{g}$$

g மாறிலியாகும். வீச்சுத் திசைவேகம் 'U' கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. எனவே R உச்சத்திலிருக்க வேண்டுமெனில் $\sin 2\alpha$ உச்சத்திலிருக்க வேண்டும்.

$$\begin{aligned} \text{அதாவது } \sin 2\alpha &= 1 \\ \text{எனவே } 2\alpha &= 90^\circ \\ \alpha &= 45^\circ. \end{aligned}$$

கொடுக்கப்பட்ட திசைவேகத்துக்கு, கிடை வீச்செகிலை உச்சத்தை அடைய வீச்சுக்கோணம் 45° ஆக இருக்க வேண்டும். அப்போது

$$\text{உச்ச வீச்செகிலை} = \frac{U^2}{g}.$$

6. தேற்றம்

ஆரம்ப வீச்சுத் திசைவேகம் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது, குறிப்பிட்ட கிடை வீச்செகிலையை அடைய சாதாரணமாக இரு வீச்சுத் திசை எழுண்டெனக் காண்பி.

ஆரம்பத் திசைவேகம் 'U' எனவும், வீச்சுக் கோணம் 'α' எனவும் கொள்க.

குறிப்பிட்ட வீச்செகிலையை 'K' என்று கொண்டால்

$$K = \frac{U^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{gK}{U^2}$$

g மாறிலியாகவும், 'U', 'K' எப்பவைகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால் $\sin 2\alpha$ என்பது ஒரு நிறை மாறிலி அளவாகும்.

$gK < U^2$ என்றும், $\sin \theta = \frac{gK}{U^2}$ என்பது அமையும் 'θ' குறுவ் கோணத்தைக் காண்போம்.

$$\text{எனவே } \sin 2\alpha = \sin \theta$$

$$\therefore 2\alpha = \theta \text{ அல்லது } 2\alpha = 180 - \theta$$

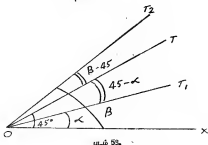
$$\therefore \alpha = \frac{\theta}{2} \text{ அல்லது } \alpha = 90 - \frac{\theta}{2}$$

ஆகவே ஆரம்ப வீச்சுக் கோணத்திற்கு $\frac{\theta}{2}$, $90 - \frac{\theta}{2}$ என்ற இரு அளவுகள் உண்டாம். இந்த இரு அளவுகளையும் α, β என்று கொண்டால் α + β = 90° என்றாகிறது.

'θ' குறுவ்கோணமாதலால் அதாவது $\theta < 90^\circ$ என்பதால் $\alpha = \frac{\theta}{2} < 45^\circ$

$$\text{எனவே, } \beta > 45$$

$$\begin{aligned} \text{மேலும், } 45^\circ - \alpha &= 45 - \frac{\theta}{2} \\ &= 90 - 45 - \frac{\theta}{2} \\ &= 90 - \frac{\theta}{2} - 45 \\ &= \beta - 45^\circ \end{aligned}$$



ஆரம்பத் திசைவேகத்துடன் உச்சக் கிடைவீச்செல்வையை அடைய வேண்டிய வீச்சுக்கோணம் 45° ஆக இருக்கவேண்டும். எனவே α , β என்ற இரு திசைகளும் உச்ச வீச்செல்வையில் திசைக்கு சமமாகச் சாய்ந்திருக்கும். கொடுக்கப்பட்ட வீச்செல்வை ' K 'ஐ அடைய வீச்சுக் கோணத்தின் திசைகள் OT_1 , OT_2 ஆக இருக்கவேண்டும்.

$$OT = 45^\circ \text{ என்றால்}$$

$$\angle T_1OT = \angle XOT - \angle XOT_1$$

$$= 45^\circ - \alpha$$

$$\angle TOT_2 = \angle XOT_2 - \angle XOT$$

$$= \beta - 45^\circ$$

$$\text{எனவே } \angle T_1OT = \angle TOT_2$$

$\therefore OT$, என்பது OT_1 , OT_2 கிடைவகங்க்கிடையேயுள்ள கோணத்தைச் சமமாகப் பிரிக்கிறது.

$$gK = U^2 \text{ என்றால் } \sin 2\alpha = 1$$

$$\therefore 2\alpha = 90^\circ$$

$$\therefore \alpha = 45^\circ$$

எனவே α -க்கு ஏனோ ஒரு மதிப்பே உண்டது.

அந்த அளவு, உச்ச வீச்செல்வையுடைய கோணமாகும்.

$$gK^2 > U^2 \text{ என்றால் } \sin 2\alpha > 1$$

எனவே ' α 'க்கு மெய்யான மதிப்புக் கிடையாது.

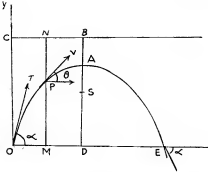
$$\text{அதாவது } \frac{U^2}{g} \text{-க்கு அதிகமான வீச்செல்வை கிடையாது.}$$

ஏனெனில், அதாவது உச்ச வீச்செல்வையாகும். அதேபோல், ' K '-ன் மதிப்புக் கொடுக்கப்பட்டால் $U^2 < gK$. எனவே மிகச்சிறு திசைவேகம்

$$U = \sqrt{gK} \text{ ஆகலாம்.}$$

7. தேற்றம்

' U ' நேரம் முடிந்தவுடன் எதிர்பொருளின் திசைவேகத்தைக் கண்டுபிடிக்க [அதன் அளவையும், திசைவையும்]



படம் 59.

கிடைதிறையுடைய 'உ' கோணம் உண்டாகும் வகையில் எதிர் பொருள், 'O'-லிருந்து 'U' திசையிலேயே தள்ளப்பட்டிருக்கும். 'உ' தோரத்திற்குப் பிறகு எதிர்பொருள், P என்ற கிடத்தில் இருப்பதாகக் கொள்ளுவோம். அப்போது திசையேகம் 'V' எனவும், அந்தத் திசையேகம் கிடைதிறையுடைய 'θ' கோணம் உண்டாகுவதாகவும் கருதுக.

'V' இயும் θ இயும் கண்டுபிடிக்க.

தொகுத்தற்படும் திசையிலேயே கிடைகருள $U \cos \alpha$ டிராபு விருப்பதால்,

$$V \cos \theta = U \cos \alpha \quad \text{.....(1)}$$

நிலைகருள $U \sin \alpha$, 'g' என்ற எதிர்ப்புக்கத்திற்கு உட்பட்டிருப்பதால்

$$V \sin \theta = U \sin \alpha - gt \quad \text{.....(2)}$$

(1), (2) சமன்பாடுகளை வர்க்கக்கூடிக் கூட்டுக.

$$V^2 = U^2 - 2Ugt \sin \alpha + g^2 t^2$$

$$\therefore V = \sqrt{U^2 - 2Ugt \sin \alpha + g^2 t^2} \quad \text{.....(3)}$$

$$\frac{(2)}{(1)} \tan \theta = \frac{U \sin \alpha - gt}{U \cos \alpha} \quad \text{.....(4)}$$

சமன்பாடுகள் (3), (4) P-ல் ஏற்படும் திசையிலேயே அளவை யும் அதன் திசையையும் குறிப்பிடுகிறது.

குறிப்பு 1

$$U \sin \alpha > g \text{ அதாவது } t < \frac{U \sin \alpha}{g}$$

= (உச்சப்புள்ளி Aஐ அடைய எறிபொருள் எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம்) $\tan \theta$ நேர்க்குறியுடையதாகும். எனவே ' θ '-வும் '+' குறியுடையது.

$$t > \frac{U \sin \alpha}{g}, \theta = - \text{ குறியுடையது}$$

$$t = \frac{U \sin \alpha}{g} \quad \theta = 0$$

எனவே உச்சப்புள்ளி A-ல், திசைவேகம் கிடைதிகையிடுவதற்கு.

குறிப்பு 2

$$t = \frac{2U \sin \alpha}{g} \text{ (= பறக்கும் நேரம்) என்றும்}$$

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{U^2 - 2Ug \sin \alpha \frac{2U \sin \alpha}{g} + g^2 \frac{4U^2 \sin^2 \alpha}{g^2}} \\ &= \sqrt{U^2 - 4U^2 \sin^2 \alpha + 4U^2 \sin^2 \alpha} \\ &= U \end{aligned}$$

$$\tan \theta = \frac{U \sin \alpha - g \frac{2U \sin \alpha}{g}}{U \cos \alpha}$$

$$= - \frac{U \sin \alpha}{U \cos \alpha}$$

$$= -\tan \alpha$$

$$\therefore \theta = -\alpha$$

எனவே எறிபொருள் ' O '-ல் வழியாக வரையப்படும் கிடைசமதளத்தை மீண்டும் சந்திக்கும்பொழுது, அதன் திசைவேகத்தின் அளவு ' V ' என்றே இருப்பதும், திசை கிடைதிகையுடன் ' $-\alpha$ ' கோணம் உண்டாக்ருவதும் கவனிக்கத்தக்கது.

8. நேதந்தம்

எறிபொருளின் பாதையிறைவின் ' P ' புள்ளியில் அதன் திசைவேகம், கியக்குவரையிலிருந்து எறிபொருள் தடவிலின்றி P -க்கு விரும்போது உண்டாக்கும் திசைவேகத்தின் அளவுக்குச் சமம்.

[' t ' நேரம் கழித்தவுடன் எறிபொருள் P என்ற புள்ளியிலிருப்பதாகக் கொள்வோம். அப்போது அதன் திசைவேகம் ' V ' எனவும்,

அதன் திசை விடைதிசையுடன் உண்டாகும் கோணம் ' θ ' எனவும் எடுத்துக்கொண்டால்,

$$V = \sqrt{U^2 - 2Ugt \sin \alpha + g^2 t^2}$$

என்று கண்டோம். எதிர்மாதையில் நியமிக்கவரையில் P -க்கு நேர் மேலேயுள்ள புள்ளி N என்றும்

$$V'^2 = 2g \cdot NP \quad [V' = N\text{-ஊக்கு } P\text{-ஊ } எதிர்மாதின் தடக்க விரிவாகப் பூமியின் எதிர்புச் சக்தியை மட்டும் கொண்டு விரும்போது உண்டாகும் திசை வேகம்.]$$

விடப்போது NP -ன் அளவைக் கண்டுபிடிக்க.

$$AB = AS$$

$$= \frac{1}{2} [\text{பரவளவியின் செவ்வகம்}]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2U^2 \cos^2 \alpha}{g}$$

$$= \frac{U^2 \cos^2 \alpha}{2g}$$

$$AD = A\text{-ன் உயரம்}$$

$$= \frac{U^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

$$\therefore BD = \frac{U^2 \cos^2 \alpha}{2g} + \frac{U^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

$$= \frac{U^2}{2g}$$

$$MN = DB$$

$$= \frac{U^2}{2g}$$

$$MP = 't' \text{ விநாடிகளில் எதிர்மாதின் நியமிக்கும் நிலைதரம்}$$

$$= U \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\therefore PN = MN - MP$$

$$= \frac{U^2}{2g} - (U \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2)$$

$$\therefore V'^2 = 2g \left[\frac{U^2}{2g} - U \sin \alpha \cdot t + \frac{1}{2} g t^2 \right]$$

$$= U^2 - 2Ugt \sin \alpha + g^2 t^2$$

$$= V^2$$

$$\therefore V' = V$$

குறிப்பு: $MN = \frac{U^2}{2g}$ என்பதால், எதிரொருக்கினால், மீயக்கு வரையின் உயரம் 'U'யி ட்டும் சரத்திக்குக் கீறும். 'உ' அதன் உயரத்தைய் பாதிக்காது. எனவே, ஒரு புள்ளி 'O'யிருந்து, ஒரே வேகத்துடன், பல திசைகளில், துகள்கள் எறியப்பட்டால், அந்தத் துகள்களின் எதிரொருக்கள் ஒரே மீயக்குவரையைக் கொண்டிருக்கிற தென்பது கவனிக்கத்தக்கது.

3. தேற்றம்

எதிரொரு வேகத்தின் அளவு கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது, துகள் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளியை அடைய, இரு எதிரொருக்கள் உண்டு.

எதிரொருக்கின் திசைப்பாதை

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2U^2 \cos^2 \alpha}$$

[இங்கு எதிரொருவேகம் 'U' எனவும், அதன் திசை, கிடைதிசை புடன் 'உ' கோணம் உண்டாக்குவதெனவும் கொள்வ.]

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியின் அச்ச தூரங்கள் (x_1, y_1) என்றால்

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \tan \alpha - \frac{gx_1^2}{2U^2 \cos^2 \alpha} \\ &= x_1 \tan \alpha - \frac{gx_1^2}{2U^2} (1 + \tan^2 \alpha) \end{aligned}$$

$$\therefore gx_1^2 \tan^2 \alpha - 2U^2 x_1 \tan \alpha + (2U^2 y_1 + gx_1^2) = 0$$

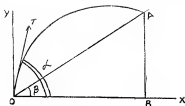
இத்தச் சமன்பாடு 'tan α' என்பதில் இருபடி சமன்பாடாகும். ஆகவே, இதன் மூலங்கள் tan α₁, tan α₂ என்றால், துகள் எறியப்படும் திசைகள் கிரைண்டென்பது தெளிவு.

10. சாய்தளத்தின் (Inclined plane) மேல் வீச்செய்தல்: கிடைதிசைப்புடன் 'β' கோணத்திற் சாய்த்திருக்கும் சாய்தளத்தின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து, கிடைதிசைக்கு 'உ' கோணமூண்டாக் கும் 'U' திசையேகத்துடன் ஒரு துகள் எறியப்பட்டும். அது எறிப்படும் சமதளம், சாய்தளத்திற்கும், அதன் அதிசாய்வு தேர்ச்சைத் தற்கும், செங்குத்தாகவுள்ள கோட்டின் வழியாகச் செல்லவேண்டும்.

10.1. தேற்றம்

சாய்தளத்தின் மேல் வீச்செய்தலையைக் கண்டுபிடிக்க

OX கிடைதிசையைக் குறிக்கும். அதனுடன் 'β' கோண மூண்டாக் கும் சாய்தளத்தின் வெட்டுமுகம் OA ஆகக் கொள்வ.



படம் 60.

'O'-ஈருத்து எழியப்படுக துரன் மீண்டும் சமதளத்தை 'A' என்ற புள்ளியில் சந்திக்கப்படும். OA-ன் அளவைக் கண்டுபிடிக்க.

ஆரம்பத் திசையிலேயுள்ள 'U'ஐ OA திசையிலும் அதற்கு செங்குத்துத் திசையிலும் கூறு போடுக.

OA திசையின் கூறு $U \cos(\alpha - \beta)$

செங்குத்துத் திசையின் அதன் கூறு $U \sin(\alpha - \beta)$. இத்தத் திசையில் றுடுக்கு $-g \cos \beta$ ஆகும்.

O-ஈருத்து A-க்குத் துரன் செல்ல 't' நேரமாகுமென்றும், இத்த நேரத்தில், OA-க்குச் செங்குத்துத் திசையில், துரன் நாகும் தூரம் 0 ஆகிறது.

$$\text{எனவே } 0 = U \sin(\alpha - \beta) t - \frac{1}{2} g \cos \beta \cdot t^2$$

$$\therefore t = \frac{2U \sin(\alpha - \beta)}{g \cos \beta}$$

இத்த நேரத்தில் கிடைத்திசை வேகம் ($U \cos \alpha$) ஆகையால்

$$OB = U \cos \alpha \cdot t$$

$$= U \cos \alpha \cdot \frac{2U \sin(\alpha - \beta)}{g \cos \beta}$$

$$OA = \frac{OB}{\cos \beta}$$

$$= \frac{2U^2 \sin(\alpha - \beta) \cos \alpha}{g \cos^2 \beta}$$

மதிநெரு குகை : $OA = r$ என்று கொள்ளுவோம். எனவே, A -ன் x அச்ச ஓரங்கள் ($r \cos \beta$, $r \sin r$) ஆகும்.

எதிரொளியின் பாதையில் சமன்பாடு

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2U^2 \cos^2 \alpha}$$

மிதந் பாதையில் A இருந்தால்

$$r \sin \beta = r \cos \beta \tan \alpha - \frac{gr^2 \cos^2 \beta}{2U^2 \cos^2 \alpha}$$

$$\begin{aligned} \therefore r &= \frac{2U^2 \cos^2 \alpha [\cos \beta \tan \alpha - \sin \beta]}{g \cos^2 \beta} \\ &= \frac{2U^2 \cos \alpha [\cos \beta \sin \alpha - \cos \alpha \sin \beta]}{g \cos^2 \beta} \end{aligned}$$

10.2 தேற்றம்

உச்ச வீச்செகிலை (Maximum Range) : சாய்தளத்தின்மேல் உச்ச வீச்செகிலையை உண்டாக்கும் வீச்சு திசையைக் காட்டுவதாகும்.

$$\begin{aligned} \text{வீச்செகிலை} &= \frac{2U^2 \cos \alpha \sin (\alpha - \beta)}{g \cos^2 \beta} \\ &= \frac{U^2}{g \cos^2 \beta} [\sin (2\alpha - \beta) - \sin \beta] \end{aligned}$$

' U ', ' β ' இவைகளின் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. எனவே வீச்செகிலை உச்சத்திலிருந்து, $\sin (2\alpha - \beta)$ மிக அதிகமாக இருக்கவேண்டும்.

$$\therefore \sin (2\alpha - \beta) = 1$$

$$\therefore 2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$$

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{எனவே உச்ச வீச்செகிலை} &= \frac{U^2}{g \cos^2 \beta} (1 - \sin \beta) \\ &= \frac{U^2}{g} \frac{(1 - \sin \beta)}{(1 - \sin^2 \beta)} \\ &= \frac{U^2}{g (1 + \sin \beta)} \end{aligned}$$

குறிப்பு 1: அதாவது $\angle AOT = \angle TOY$

துகக் எழியப்படும் திசை OT, LAOYஐ மீறு சமபக்கக் கோணம் பதிக்கிறது. LAOY, திசை அச்ச OY-க்கும் சாய்தளம் OA-க்கு மிகைப்பெயர்வுகளாக உள்ளன.

10-3. தேற்றம்

வீச்செல்லையில் அளவு கொடுக்கப்பட்டால், வீசும் திசைகள் மீறண்டு உண்டாக. அவைகள் உச்ச வீச்செல்லையில் திசைக்குச் சமமாக சாய்த்திருக்கும்.

வீச்செல்லையில் அளவு கொடுக்கப்பட்டால்

$\sin(2\alpha - \beta)$ -ன் அளவும் கொடுக்கப்பட்டதென்றால்

$$\sin(2\alpha - \beta) = \sin \theta \text{ என்றால்}$$

$$2\alpha - \beta = \theta \text{ அல்லது } 180^\circ - \theta \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore (2\alpha_1 - \beta) = \theta \text{ என்போம்.}$$

$$(2\alpha_2 - \beta) = 180^\circ - \theta \text{ என்போம்.}$$

எனவே, α_1, α_2 என்ற மீறண்டு வீச்சுக் கோணங்களுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பு,

$$\therefore 2\alpha_2 - \beta = \pi - (2\alpha_1 - \beta)$$

$$\therefore \alpha_2 - \frac{\beta}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right) - \alpha_1$$

$\frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2}$ என்ற கோணம், உச்ச வீச்செல்லையை அடையும் வீச்சுக் கோணமாகும். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட வீச்செல்லையையடைய உண்டாகும் மீறண்டு வீச்சு திசைகளும், உச்ச வீச்செல்லையையடையும் வீச்சு திசைக்குச் சமமாகச் சாய்த்திருக்கும்.

10-4. தேற்றம்

சாய்தளத்திலிருந்து எழிப்பொருள் அடையும் உச்சத் தூரத்தைக் கணக்கிடுக.

சாய்தளத்திலிருந்து செங்குத்தான திசையில் துகளின் மியக்கத்தைக் கவனிடப்போம். மிதந்த திசையில் ஆரம்பத் திசையேகம் $U \sin(\alpha - \beta)$ எனவும் அந்தத் திசையேகம் ' $g \cos \beta$ ' என்ற எதிர்முகக்கொத்திற்குக் கட்டுப்பட்டிருக்கிறதென்றால் கண்டோம்.

't' நேரத்தில் துகள் நகர்ந்திருக்கும் 'y' தூரம்,

$$y = U \sin (\alpha - \beta), t - \frac{1}{2}g \cos \beta, t^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = U \sin (\alpha - \beta) - g \cos \beta, t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g \cos \beta$$

= குறை குறிவேவுள்ளது.

$$y \text{ உச்சத்தில் இருக்க } \frac{dy}{dt} = 0 \text{ ஆக இருக்கவேண்டும்.}$$

$$\text{அப்போது } t = \frac{U \sin (\alpha - \beta)}{g \cos \beta} \text{ ஆகும்.}$$

அந்த நேரத்தையப் பயன்படுத்தி 'y'-ன் உச்ச மதிப்பு

$$\begin{aligned} &= U \sin (\alpha - \beta) \frac{U \sin (\alpha - \beta)}{g \cos \beta} - \frac{1}{2}g \cos \beta \frac{U^2 \sin^2 (\alpha - \beta)}{g^2 \cos^2 \beta} \\ &= \frac{U^2 \sin^2 (\alpha - \beta)}{g \cos \beta} - \frac{U^2 \sin^2 (\alpha - \beta)}{2g \cos \beta} \\ &= \frac{U^2 \sin^2 (\alpha - \beta)}{2g \cos \beta} \end{aligned}$$

$$\text{குறிப்பு: } y\text{-ன் உச்ச மதிப்பான } \frac{U^2 \sin^2 (\alpha - \beta)}{2g \cos \beta} \text{ ஐ அடைய}$$

$$\text{ஆகும் நேரம்} = \frac{U \sin (\alpha - \beta)}{g \cos \beta}$$

இத்தேரம் பறக்கும் நேரத்தில் பாதி என்பது தெளிவு.

மற்றொரு முறை :—சாய்நனத்திலிருந்து துகள் மிக அதிகத் தூரத்தில் இருக்கும்போது, துகளின் திசையெனம், சாய்நனத்திற்கு இணையான திசையிலே இருக்கும். எனவே சாய்நனத்திற்குச் செங்குத்தான திசையெனத்தின் கூறு = 0 எனலாம். ஆகவே 'x' சாய்நனத்திலிருந்து அதிகத் தூரத்தைக் குறித்தால்

$$0 - [U \sin (\alpha - \beta)]^2 = -2g \cos \beta, x$$

$$\therefore x = \frac{U^2 \sin^2 (\alpha - \beta)}{2g \cos \beta}$$

இந்த உயரத்தையடைய எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் 't' என்றால்,

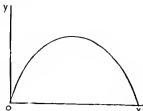
$$0 = U \sin (\alpha - \beta) - g \cos \beta, t$$

$$\therefore t = \frac{U \sin (\alpha - \beta)}{g \cos \beta}$$

11. தேற்றம்

அணைத்துக்கொள்ளும் பரவளைவு (Enveloping Parabola) : கொடுக்கப்பட்ட திசைவேகத்துடன் ஒரே திசை சமதளத்தில், தூரம் ஒரு புள்ளியிலிருந்து எறியப்பட்டாகி, அவைகள் மீயங்கும் பாதைகளின் அணைத்துக்கொள்ளும் வளைவரை வேறொரு பரவளைவாகும்.

நிறுவல் (1) :



படம் 61.

வீச்சுப் புள்ளியை O என்ற ஆதிபாசையும், O -ன் வழியாகச் செல்லும் கிடைக்கோட்டை x -அச்சையும் O -ன் வழியாகச் செல்லும் திசைக்கோட்டை y -அச்சையும் எடுத்துக்கொள்க. ' α ' வீச்சுக் கோணமாகவும், ' U ' திசைவேகமாகவும் இருந்தால் வீச்சுப் பாதையின் சமன்பாடு

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2U^2 \cos^2 \alpha} \quad (1)$$

இதை அணைத்துக்கொள்ளும் வளைவரையைக் கண்டுபிடிக்க (1) சமன்பாட்டை ' α 'ஐ பொருத்த வகையில்

$$0 = x \sec^2 \alpha - \frac{gx^2}{2U^2} [2 \tan \alpha \cdot \sec^2 \alpha] \quad (2)$$

$$= x - \frac{gx^2}{U^2} \tan \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{U^2 x}{gx^2}$$

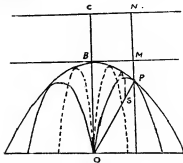
$$= \frac{U^2}{gx}$$

' α '-ன் இந்த மதிப்பை (1) சமன்பாட்டில் இருக்க.

$$\begin{aligned}
 \therefore y &= h \frac{U^2}{g^2} - \frac{gx^2}{2U^2} \left[1 + \frac{U^4}{g^2 x^2} \right] \\
 &= \frac{U^2}{g} - \frac{gx^2}{2U^2} - \frac{U^2}{2g} \\
 &= \frac{U^2}{2g} - \frac{gx^2}{2U^2} \\
 -\frac{2U^2}{g} \left[y - \frac{U^2}{2g} \right] &= x^2
 \end{aligned}$$

மிகுபே அணைத்துக்கொள்ளும் பரவலின் சமன்பாடாகும்.

நிறுவல் (2):



படம் 62.

வீச்சுப் புள்ளி O ஆகவும், வீச்சுத் திசையேகம் 'U' ஆகவும் கொள்க. $\frac{U^2}{2g} = h$ என்று எடுத்துக்.

நிலைதிசையில் 'h' தூரத்துக்கு OB என்ற நேர்மேட்டை வரைக. BM என்ற கிடை நேர்மேட்டு பரவலின் மையக்குவளை என்பதை அறிவேம். அத்த மையக்குவளை 'O'-லிருந்து 'U' திசையேகத் துடன் வீசப்படும் எதிரொளியின் பாதைகளாகிய பரவல்களுக்குப் பொதுமென்றும் அறிவேம்.

OAP என்பதை ஏதாவதொரு பாதையாகக் கொள்ளுவோம். அதன் குவியம் 'S' ஆகவும் OSP குவிய நான் ஆகவும் இருக்கும்.

OB நீட்டி, $BC=OB$ என்ற அளவில் C ஐக் குறிக்க. CN ஐக் கிடைதிறையில் வரைக. நிபேதிகையில் PMN என்ற நேர்கோடு வரைக.

$$\begin{aligned} OP &= OS+SP \\ &= OB+PM \\ &= BC+PM \\ &= MN+PM \\ &= PN. \end{aligned}$$

மிகு O நிலையான புள்ளி. CN , O -யிலிருந்து $2h$ தூரத்தில் வரையப்பட்ட நேர்கோடு.

$PO = PN$ என்பதால் P -ன் நிலம்பாதை O ஐக் குவியமாகவும், CN ஐ மிகு வரையாகவும் (Directrix) கொண்ட ஒரு பரவளைவாகும்.

$OB = BC$. எனவே B பரவளைவின் உச்சியாகும்.

மேலும் ஏதாவதொரு பாதையிலுள்ள P -ன் குவிய தூரம் PS , மிகக்குவரை தூரம் PM என்ற ஆகிறது. இந்தப் பாதைக்கு P -ல் வரையப்படும் தொடுகோடு SPM கோணத்தை மிகு சம்பாக்கங்களாகப் பிரிக்கும்.

அதேபோல் OBP பரவளைவுக்கு PO குவியதூரமாகவும் PN மிகக்குவரை தூரமாகவும் உள்ளது. எனவே OBP பரவளைவுக்கு P -ல் வரையப்படும் தொடுகோடு OPN அல்லது SPM கோணத்தை மிகு சம்பாக்கங்களாகப் பிரிக்கிறது. ஆகவே, மிகு பரவளைவுகளின் தொடுகோடுகளும் ஒன்றே என்பது தெளிவு. எனவே OBP பரவளைவு, OAP போன்ற பரவளைவுகளை வெளிப்பக்கமாகத் தொடுகிறது. ஆகையால் OAP ஐ அணைத்துக்கொள்ளும் பரவளைவு என்னாம்.

குறிப்பு: அணைத்துக்கொள்ளும் பரவளைவு OBP ஐப் பற்றிச் சில கருத்துகளை நினைவில் கொள்ளுவோம்.

1. அதன் குவியம், வீச்சுப் புள்ளி 'O' ஆகும்.
2. அதன் மிகக்குவரை O -க்கு மேல் $\frac{U^2}{g}$ தூரத்திலுள்ளது.

எதிரொளிகள்

மிதந்த தூரம் வீச்சுப்பாதைகளின் மீயக்குவசைகள் தூரத்தைப் போல் கிடைத்து மட்டமானும்.

$$\begin{aligned} 3. \text{ அதன் செவ்வகம்} &= 2 \cdot OC \\ &= 2 \cdot 2h \\ &= 4 \cdot h \end{aligned}$$

4. அதன் அச்சு OB கீழ்க்கு திசைதிசையிலுள்ளது.

5. மிதந்த அலைத்துக் கொள்ளும் பரவலை வீச்சுப்பாதைகளை வெளிப்படுத்தமாகத் தொடுவதால் மிதந்த பரவலைக்கு வெளியேயுள்ள எந்தப் புள்ளியையும், 'U' திசையேகத்துடன் 'O'-மிருந்து எதிர்ப்படும் துறை அடைய முடியாது. எனவே மிதந்த பரவலை எல்லாம் பரவலை எனலாம்.

6. கொடுக்கப்பட்ட திசையில் வீச்செல்லையைக் கண்டுபிடிக்க, அந்தத் திசை, அலைத்துக் கொள்ளும் பரவலை எந்தப் புள்ளியில் சந்திக்கிறதென்று காண்க. அந்தப் புள்ளிக்கும் O-க்கும் உள்ள தூரமே வீச்செல்லையாகும்.

நிறுவல் (3)

'U' திசையேகத்துடன் 'α' திசையேகத்தின் மீய்க்கும் எதிர் பரவலின் பாதையில் சமன்பாட்டை.

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2U^2 \cos^2 \alpha} \rightarrow (B) \text{ எனக் கொள்ளலாம்.}$$

கொடுக்கப்பட்ட வீச்சுத் திசையேகத்துடன் துறை (x_1, y_1) என்ற புள்ளியை அடைந்தால்,

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \tan \alpha - \frac{gx_1^2}{2U^2 \cos^2 \alpha} \\ &= x_1 t - \frac{gx_1^2}{2U^2} (1+t^2) \quad [\text{மிக்கு } \tan \alpha = t \text{ என்போம்}] \end{aligned}$$

$$\therefore gx_1^2 t^2 - 2U^2 x_1 t + (2U^2 y_1 + gx_1^2) = 0 \rightarrow \dots (A)$$

மிகு 't'-ல் மிகுபடி சமன்பாடாகும். ஆகவே 't'-க்கு மெய்யான மதிப்பு இருக்கவேண்டுமானால், மிதந்த தன்மை கட்டி, மிகையாகவே அல்லது பூச்சியமாகவே தான் இருக்கவேண்டும்.

$$\begin{aligned} 4U^4 x_1^2 - 4gx_1^2 (2U^2 y_1 + gx_1^2) &> 0 \\ U^4 - 2U^2 gy_1 - g^2 x_1^2 &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore x_1^2 &< -\frac{2U^2}{g}y_1 + \frac{U^4}{g^2} \\ &< -\frac{1}{2}\frac{2U^2}{g}\left[y_1 - \frac{U^2}{2g}\right]\end{aligned}$$

$x_1^2 > -\frac{2U^2}{g}\left[y_1 - \frac{U^2}{2g}\right]$ என்றும் (A) சமன்பாட்டின் மூலக்கள் மெய்யிலானவைகளாகும். எனவே எதிர்மொருவின் பாதை (x_1, y_1) என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்ல முடியாது.

ஆகவே பாதையில் (x_1, y_1) என்ற புள்ளி மிகுக்கவேண்டாமாறும்

$$x_1^2 < -\frac{2U^2}{g}\left[y_1 - \frac{U^2}{2g}\right]$$

$x_1^2 = -\frac{2U^2}{g}\left[y_1 - \frac{U^2}{2g}\right] \rightarrow (D)$ என்ற நிபந்தனைப்படி (x_1, y_1) என்ற புள்ளி,

$x^2 = -\frac{2U^2}{g}\left[y - \frac{U^2}{2g}\right] \rightarrow (C)$ என்ற பரவளையின் மேலிருக்க வேண்டும்.

$x_1^2 < -\frac{2U^2}{g}\left[y_1 - \frac{U^2}{2g}\right]$ என்ற நிபந்தனைப்படி, (x_1, y_1) என்ற புள்ளி பரவளைவுக்குள்ளே மிகுக்கவேண்டும்.

$x^2 > -\frac{2U^2}{g}\left[y - \frac{U^2}{2g}\right]$ என்றும் (x_1, y_1) என்ற புள்ளி பரவளைவுக்கு வெளியேயுள்ளது.

எனவே 'O'ஐ ஆதியாகக் கொண்டு அதன் வழியாகச் செல்லும் நிறைதளத்தில் எதிர்ப்படும் துகள், கொடுக்கப்பட்ட ஆரம்பத் திசை வேகத்தின் திசையினாலும், அது மியக்கும் பாதையிலுள்ள புள்ளிகள் 'C' சமன்பாடு குறிக்கும் பரவளையின் மேலே அல்லது உள்வெளியே மிகுக்கும். ஆகவே மித்தப் பரவளைவை எல்லைப் பரவளைவு எனலாம்.

மித்த எல்லைப் பரவளைவு, (B) சமன்பாடு குறிக்கும் பரவளைவைத் தொடுகிறதெனக் காணப்படுகிறது.

(C), (B)-ஐ (x_1, y_1) -ல் சந்திக்கட்டும். (D) நிபந்தனைப்படி, (A)-ன் மூலக்கள் சமமாகும்.

$$t_1 + t_2 = \frac{2U^2 x_1}{g x_1^2}$$

$$t_1 = t_2 \text{ என்பதால்}$$

$$\therefore 2 \tan \alpha = \frac{2U^2}{g x_1}$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{U^2}{g x_1}$$

$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2U^2} (1 + \tan^2 \alpha)$ என்பதை x -இல் பொதுத்து வகையிடுக.

$$\frac{dy}{dx} = \tan \alpha - \frac{g x}{U^2} (1 + \tan^2 \alpha)$$

$$\tan \alpha = \frac{U^2}{g x} \text{ என்பதால்}$$

(x_1, y_1) புள்ளியில்

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{U^2}{g x_1} - \frac{g x_1}{U^2} \left(1 + \frac{U^4}{g^2 x_1^2} \right) \\ &= \frac{U^2}{g x_1} - \frac{g x_1}{U^2} - \frac{U^2}{g x_1} \\ &= -\frac{g x_1}{U^2} \end{aligned}$$

$x^2 = \frac{-2U^2}{g} \left[y - \frac{U^2}{2g} \right]$ என்பதை x -இல் பொதுத்து வகையிட்டால்

$$2x = \frac{-2U^2}{g} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$\therefore (x_1, y_1)$ புள்ளியில்,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g x_1}{U^2} \text{ ஆகிறது.}$$

(B), (C) சமன்பாடுகள் இரண்டுக்கும் பரவளைவுகள் சமவகன் சுத்திக் கும் புள்ளியில் ஒரே சாய்வு மதிப்பை உண்டாக்க. எனவே அவைகள் ஒன்றையொன்று தொடுகின்றன.

⁴ x^2 மாறும்போது, (B) இரண்டுக்கும் பரவளைவுகள் எல்லாம் (C) இறிக் கும் பரவளைவைத் தொடுகின்றன. எனவே (C)-இ் (B)-ன் அனைத்துத் தொடுகும் பரவளைவு என்கிறோம்.

$\frac{U^2}{2g} = h$ என்றும் அனைத்துக்கொள்ளும் பரவலாவின் சமன்பாட்டை,
 $x^2 = -4h(g-h)$ என்று எழுதலாம்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

1. 30° ஏற்றக் கோணத்தில், விநாயுக்கு 30 செ. மீ. திசைவேகத்தில், ஒரு துகள் எறியப்படுகிறது. (1) அடையும் மிக அதிகத் தூரம், (2) பறக்கும் நேரம், (3) எழும் புள்ளியின் வழியாக வரையப்படும் கிடை சமதளத்தின் மேல் வீச்செல்லை, (4) 15 செ. மீ. உயரத்தில் துகளின் திசைவேகம், அதன் திசை—கிடைவரைக் கண்டுபிடிக்க

$$\text{ஆரம்பக் கிடைதிசை வேகம்} = 30 \times \cos 30^\circ$$

$$= 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 15\sqrt{3} \text{ செ. மீ./விநாடி.}$$

$$\text{ஆரம்ப நிலை திசைவேகம்} = 30 \times \sin 30^\circ$$

$$= 30 \times \frac{1}{2}$$

$$= 15 \text{ செ. மீ./விநாடி.}$$

(1) அடையும் மிக அதிகத் தூரம் 'h' என்று கொண்டால், அப்போது துருக்கு நிலைதிசை வேகம் கிடையாது. எனவே,

$$0 - 15^2 = -2g.h$$

$$\therefore h = \frac{225}{2 \times g} \text{ செ. மீ. } g = 981 \text{ செ.மீ./விநாடி}^2$$

(2) பறக்கும் நேரம் 't' விநாயுடன் என்றும் அப்போது நிலை உயரம்

$$= 0$$

$$0 = 15t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\therefore t = \frac{30}{g} \text{ விநாயுடன்}$$

(3) கிடை வீச்செல்லையைக் கண்டுபிடிக்க, $\frac{30}{g}$ விநாயுகளில் கிடை திசை வேகமாகிய $15\sqrt{3}$ செ. மீ./விநாடி சமச்சீராக இருப்பதால் கிடைவீச்செல்லை $= \frac{30}{g} \times 15\sqrt{3} = \frac{450\sqrt{3}}{g}$ செ. மீ.

(4) 15 செ. மீ. உயரத்தில், துகள் அடையும் நிலைதிசை வேகம் 'V' என்றும்

$$V^2 - 15^2 = -2g \cdot 15$$

$$V^2 = 225 - 30g$$

$$\therefore V = \sqrt{225 - 30g}$$

கிடைதிறை வேகம் மாதிரியில்லாமலிருப்பதால்

$$\text{அது} = 15\sqrt{3} \text{ செ. மீ./விநாடி.}$$

கிடைதிறைப்புடன் துகள் 15 செ. மீ. உயரத்தில் விடப்படும் திறை 9 கோணத்திடை உண்டாக்கினால்

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{225 - 30g}}{15\sqrt{3}}$$

$$\text{மேலும் விநாடி வேகம்} = 225 - 30g + 225 \times 3$$

$$= 4 \times 225 - 30g$$

$$= 900 - 30g \text{ செ. மீ./விநாடி.}$$

2. கிடைதிறைப்புடன் $\tan^{-1} 3$ கோணம் உண்டாகும் வகையில் ஒரு பொருள் விநாடிக்கு 80 அடி திசைவேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. பொருள் 90 அடி நிலை உயரத்தை வடைக்கிறதெனவும், பதக்கும் நேரம் ஏறக்குறைய 4½ விநாடிகளெனவும் காண்பி. வீச்சுப் புள்ளியின் வழியாக வரையப்படும் கிடை சமதளத்தின்மேல், வீச்செல்வையையும் காண்பிடி.

$$\text{விசு} U = 80$$

$$\alpha = \tan^{-1} 3$$

$$\therefore \tan \alpha = 3$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\text{பொருள் விடைபுறம் அதிகத் தூரம்} = \frac{U^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

$$= \frac{5}{80 \times 80} \times \frac{3 \times 3}{10} \times \frac{1}{2 \times 32}$$

$$= 90 \text{ அடி}$$

$$\text{பதக்கும் நேரம்} = \frac{2U \sin \alpha}{g}$$

$$= 2 \times 80 \times \frac{3}{\sqrt{10}} \times \frac{1}{32}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{15}{\sqrt{10}} = \frac{15}{10} \sqrt{10} \\
 &= \frac{3}{2} \times 3.162 \text{ (ஏறக்குறைய)} \\
 &= 4.743 \text{ விநாடிகள்} \\
 &= 4\frac{3}{4} \text{ விநாடிகள் (ஏறக்குறைய)} \\
 \text{கிடை வீச்செல்லை} &= \frac{2U^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g} \\
 &= \frac{5}{32} \times \frac{2 \times 30 \times 80}{32} \times \frac{3}{\sqrt{10}} \times \frac{1}{\sqrt{10}} \\
 &= \frac{400 \times 3}{19} \\
 &= 120 \text{ அடிகள்}
 \end{aligned}$$

3. ஒரு துகள் எறியப்படும்போது அடைபடும் மிக அதிக தூரம், வீச்சுப் புள்ளி வழியாக வரையப்படும் கிடை சமநிலைநிலை மையத்தின் மீச்செல்லையில் தான்மிக் ஒரு பங்கென்றும் வீச்சுக் கோணத்தை காட்டுகிறது.

ஆரம்பத் திசைவேகம் 'U' எனவும், வீச்சுக்கோணம் 'α' எனவும் கொண்டால் துகள் அடைபடும் மிக அதிகத் தூரம் = $\frac{U^2 \sin^2 \alpha}{2g}$

$$\text{கிடை வீச்செல்லை} = \frac{2U^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2g}$$

$$\frac{U^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 U^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

$$\tan \alpha = 1$$

$$\alpha = 45^\circ$$

4. கிடை நிலையுடன் $\tan^{-1} \frac{3}{4}$ கோணமுண்டாக்கும் வகையில், விநாடிக்கு 100 அடி திசைவேகத்துடன் எறியப்படும் துகள் 80 சென்டி தூரத்திலுள்ள 36 அடி உயரக் கவரை, தொட்டுக்கொண்டு தான்முண்டாக்கிவிடும்.

$$\text{துகளின் பாதை } y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2U^2 \cos^2 \alpha}$$

$$= x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2U^2} [1 + \tan^2 \alpha]$$

எதிர்மொருக்கள்

மிக்கு $U = 100$, $\alpha = \tan^{-1} \frac{3}{4}$

$$\begin{aligned}\therefore y &= x^2 - \frac{32 \times x^2}{2 \times 100} (1 + \frac{9}{16}) \\ &= \frac{3x}{4} - \frac{16}{100 \times 100} \times \frac{25}{16} \cdot x^2 = \frac{3x}{4} - \frac{x^2}{400}\end{aligned}$$

கவரின் மேல்பாகத்தில் அச்ச தூரங்களை (240, 36) என்று கொள்ளலாம்.

$x = 240$ ஆக இருக்கும்போது

$$\begin{aligned}y &= \frac{3 \times 240}{4} - \frac{240 \times 240}{400} \\ &= 180 - 144 \\ &= 36\end{aligned}$$

எனவே தூக்க கவரைத் தாண்டும்.

5. 30° வீச்சுக் கோணத்தில் 128 அடிகள்/விநாடி திசைவேகத் துடல் எழியப்படும் ஒரு கல், 48 அடி உயரத்தையடைய எவ்வளவு நேரமாகும்?

$$\begin{aligned}\text{நிலைதிசை வேகம்} &= 128 \times \sin 30^\circ \\ &= 64 \text{ அடி/விநாடி.}\end{aligned}$$

மிந்தத் திசைவேகம் ' g ' என்ற எதிர்முகக்கத்துக்குக் கட்டுப்பட்டு இருக்கும்.

$$\begin{aligned}\therefore 48 &= 64t - \frac{1}{2}gt^2 \\ &= 64t - 16t^2 \\ t^2 - 4t + 3 &= 0 \\ (t-1)(t-3) &= 0 \\ t &= 1 \text{ அல்லது } 3.\end{aligned}$$

கல் வீசப்பட்ட 1 விநாடி கழித்து, கல் $48'$ உயரம் சென்றிருக்கும். மீண்டும் 3 விநாடிகள் கழித்து, கல் $48'$ உயரத்தையடையும்.

6. 15° உயர 'கோல்' கம்பத்தில் முன்னே, 4 சென்னை தூரத்தி் இருந்து உதைக்கப்படும் ஒரு கால்பந்து 'கோல்' மேல் கம்பத்திற்குச் சற்றுக் கீழே சென்று, கோல் கம்பத்துக்குப் பின்னே 2 சென்னை தூரத்தில் விழுகிறது. பந்து மிதக்கும் பாதை, கோல் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக இருந்தால், வீச்சுத் திசைவேகம் $12\sqrt{3}$ அடி/விநாடி எனக் காண்பி.

ஆரம்பத் திசையெனக் 'U' எனவும், வீச்சுக் கோணம் 'α' எனவும் கொள்ளாது, பாதையின் சமன்பாடு

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2U^2 \cos^2 \alpha} \text{ என்பது தெரியும்}$$

கோலின் மேல் அம்பத்திற் பந்து துறையும் புள்ளியின் அச்ச தூரங்கள் (12, 8) ஆகிறது. இது வீச்சுப் பாதையில் அமைய வேண்டும்.

$$8 = 12 \tan \alpha - \frac{32 \times 144}{2 \times U^2} (1 + \tan^2 \alpha) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{கிடை வீச்செல்லை} &= \frac{U^2 \sin 2\alpha}{g} \\ &= 18 \end{aligned}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \text{ ஆதலால்}$$

$$\frac{U^2 \tan \alpha}{16 (1 + \tan^2 \alpha)} = 18$$

$$\frac{16 (1 + \tan^2 \alpha)}{U^2} = \frac{\tan \alpha}{18} \quad (2)$$

∴ (1) சமன்பாடு

$$\begin{aligned} 8 &= 12 \tan \alpha - \frac{8}{13} \times \tan \alpha \\ &= 4 \tan \alpha \end{aligned}$$

என்கிறது.

$$\therefore \tan \alpha = 2.$$

(2) சமன்பாட்டில் $\tan \alpha$ -க்கு 2 என்ற மதிப்பை அளித்தால்

$$U^2 = \frac{18 \times 16(1+4)}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore U &= 3 \times 4\sqrt{5} \\ &= 12\sqrt{5} \text{ அடி/விநாடிகள்} \end{aligned}$$

7. ஆரம்பத் திசையெனக் 'U' -யுடன் எறியப்படும் ஒரு துகள் வீச்சுப் புள்ளியிலிருந்து d' தூரத்திலுள்ள ஒரு கவரின் மேல் எய்தும் மிக அதிகத் தூரம்

$$\frac{U^2}{2g} - \frac{gd^2}{2U^2} \text{ என நிரூபி.}$$

அப்போது வீச்சுப் பாதையில் துகள் அடையும் அதிக உயரத்தைக் கண்டுபிடி.

வீச்சுக் கோணம் ' α ' என்றும், வீச்சுப் பாதையின் சமன்பாடு

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2U^2 \cos^2 \alpha} \text{ என்றாகும்.}$$

$$x = d \text{ என்றும்}$$

$$\begin{aligned} y &= d \tan \alpha - \frac{gd^2}{2U^2} (1 + \tan^2 \alpha) \\ &= d \tan \alpha - \frac{gd^2}{2U^2} (1 + t^2) \quad [t = \tan \alpha \text{ என்க.}] \end{aligned}$$

' d '-ம், ' U '-ம் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால் ' y ' என்பது ' α '-ன் அல்லது ' t '-ன் ஒரு சார்பானாகும். எனவே ' y '-ன் உச்சத்தைக் காண,

$$\frac{dy}{dt} = 0 \text{ -ஆகவும்}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \text{குறை குறியடைய இருக்க வேண்டும்}$$

$$0 = \frac{dy}{dt}$$

$$= d - \frac{gd^2}{U^2} 2t$$

$$\therefore t = \frac{U^2}{gd}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{gd^2}{U^2}$$

$$= \text{குறை குறியடைய உண்டாகு.}$$

$$\text{எனவே} \quad t = \frac{U^2}{gd} \text{ என்ற மதிப்புக்கு } y \text{ உச்சத்தை அடையும்}$$

$$\text{உச்ச மதிப்பு } y = d \frac{U^2}{gd} - \frac{gd^2}{2U^2} \left(1 + \frac{U^4}{g^2 d^2} \right)$$

$$= \frac{U^2}{g} - \frac{gd^2}{2U^2} - \frac{U^2}{2g}$$

$$= \frac{U^2}{2g} - \frac{gd^2}{2U^2}$$

அப்போது

வீச்சுப் பாதையில் துகள் அடையும் மிக அதிக தூரம்

$$\begin{aligned}
 &= \frac{U^2 \sin^2 \alpha}{2g} \\
 &= \frac{U^2}{2g} \cdot \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} \\
 &= \frac{U^2}{2g} \cdot \frac{1}{1 + \frac{v^2 d^2}{U^4}} \\
 &= \frac{U^2}{2g} \cdot \frac{U^4}{U^4 + v^2 d^2} \\
 &= \frac{U^6}{2g(U^4 + v^2 d^2)}
 \end{aligned}$$

8. 48 அடி/விநாடி திசைவேகத்தடிக் ஒரு துகள் எறியப்படுகிறது. வீச்சுப் புள்ளியில் வழியாகச் செல்லும் கிடைசமதளத்தின்மேல் உச்ச வீச்செல்வையைக் காண்போகீக. மேலும் 36 அடி வீச்செல்வையை அடைய வேண்டிய பிரகாரம் எறிதிசைவேகமும் காண்போகீக.

வீச்சுக் கோணம் 'α' என்றால், ஆரம்பத் திசைவேகத்தின் நிலை, கிடை கூறுகள் முறையை 48 sin α, 48 cos α. என்றாகும்.

't' என்பது பதக்கும் நேரமென்றால், அத் நேரத்தில் துகள் இயங்கும் நிலைதூரம் '0' ஆகும்.

$$0 = 48 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\therefore t = 48 \sin \alpha \times \frac{2}{g}$$

$$\begin{aligned}
 &= 48 \sin \alpha \times \frac{2}{32} \\
 &= 3 \sin \alpha.
 \end{aligned}$$

நித்தேரத்தில் துகள் இயங்கும் கிடைதூரம்

$$\begin{aligned}
 &= 48 \cos \alpha \cdot t \\
 &= 48 \cos \alpha \times 3 \sin \alpha \\
 &= 72 \sin 2\alpha.
 \end{aligned}$$

நித்தேர தூரம் உச்சத்திலிருந்து sin 2α = 1 ஆக வேண்டும்.

$$2\alpha = 90^\circ \text{ அல்லது } \alpha = 45^\circ$$

$$\alpha = 45^\circ \text{ ஆகும் போது}$$

$$\text{உச்ச வீச்செல்லை} = 72 \text{ அடிகள்}$$

$$\text{வீச்செல்லை 36 அடிகள் ஆகும் போது}$$

$$72 \sin 2\alpha = 36$$

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$2\alpha = 30^\circ, \text{ அல்லது } 150^\circ$$

$$\therefore \alpha = 15^\circ \text{ அல்லது } 75^\circ$$

9. கிடைநிலையின் $\sin^{-1} \frac{1}{3}$ கோணமுண்டாக்கும் வகையில், ஒரு வெகுருண்டு விநாடிக்கு 1280 அடிகள் திசைவேகத்துடன் செலுத்தப்படுகிறது. கிடைதளத்தின்மேல் வீச்செல்லை, பறக்கும் நேரம், குண்டு அடைபடும் மிக அதிக உயரம் நிலைவகளைக் கண்டுபிடி.

$$\text{ஆரம்பத் திசைவேகம்} = 1280 \times \cos [\sin^{-1} \frac{1}{3}]$$

$$160$$

$$= \frac{1280 \times \sqrt{63}}{3}$$

$$= 160 \sqrt{63} \text{ அடிகள்/விநாடி}$$

$$\text{ஆரம்ப நிலைதிசை வேகம்} = 1280 \times \frac{1}{3}$$

$$= 160 \text{ அடிகள்/விநாடி}$$

மிக அதிக உயரத்தை அடைய எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் 't' விநாடிகள்; மித்நேரத்தில் நிலைதிசை வேகம் '0' ஆகிறது.

$$0 = 160 - gt$$

$$\therefore t = \frac{160}{32}$$

$$= 5 \text{ விநாடிகள்}$$

மித்ந் 5 விநாடிகளில் நிலைதிசையில் குண்டு நியங்கும் தூரம்

$$= 160 \times 5 - \frac{1}{2} \times 32 \times 5^2$$

$$= 800 - 16 \times 25$$

$$= 400 \text{ அடிகள்}$$

வீச்செல்லையையடைய 10 விநாடிகள் பிடிக்கும்

அப்போது குண்டு நியங்கும் கிடைதூரம்,

$$= 160 \times \sqrt{63} \times 10$$

$$= 1600 \times \sqrt{63}$$

$$= 12700 \text{ அடிகள் [ஏறக்குறைய]}$$

10. எதிரொருவருக்கு 'b' தூரத்திலுள்ள 'a' உயரமான ஒரு கலாசையும் அதற்கு கிணையான 'a' தூரத்திலுள்ள 'b' உயரமான மற்ருரு கலாசையும் தொட்டுக்கொண்டு ஒரு தூண் தாண்டுகிறது. எதிர்பாராத கவலின் நிலைக்குச் செங்குத்தாக இருந்தால், கிடை சமதளத்தில் வீச்செய்யையைக் காண்போம்.

ஆரம்பத் நிலைவேகம், 'U' என்றும், வீச்சுக் கோணம் 'α' என்றும் கொண்டால், வீச்சுப் பாதையின் சமன்பாடு

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2U^2 \cos^2 \alpha} \dots\dots(1)$$

கவலின் மேல்பாதத்தில் மேற்கண்ட பாதையிலுள்ள புள்ளிகளின் அச்ச தூரங்கள் (b, a), (a, b) ஆகும்.

$$\text{எனவே } a = bt - \frac{gb^2}{2U^2} (1+t^2) \dots\dots(2) \quad [t = \tan \alpha \text{ என்க}]$$

$$b = at - \frac{ga^2}{2U^2} (1+t^2) \dots\dots(3)$$

$$(2)' \Rightarrow a - bt = -\frac{gb^2}{2U^2} (1+t^2)$$

$$(3)' \Rightarrow b - at = -\frac{ga^2}{2U^2} (1+t^2)$$

$$\therefore \frac{a-bt}{b-at} = \frac{b^2}{a^2} \dots\dots(4)$$

$$a^3 - a^2bt = b^3 - ab^2t$$

$$ab(b-a)t = b^3 - a^3$$

$$\therefore t = \frac{b^2 + a^2 + ab}{ab}$$

$$\tan \alpha = t = \frac{(a-b)^2 + 3ab}{ab}$$

$$= \frac{(a-b)^2}{ab} + 3$$

$$\therefore > 3 \left[\frac{(a-b)^2}{ab} \text{ நிறை குறியுடையதல்ல} \right]$$

$$\therefore \alpha > \tan^{-1} 3$$

$$\begin{aligned} \text{கிடைவீச்சு கொடு} &= \frac{U^2 \sin 2\alpha}{g} \\ &= \frac{2U^2 t}{g(1+t^2)} \end{aligned}$$

சமன்பாடு (2)-ஐக்குத்து

$$\frac{g(1+t^2)}{2U^2} = \frac{bt-a}{b^2}$$

$$\frac{g(1+t^2)}{2U^2t} = \frac{1}{b^2t}(bt-a)$$

(4)ஐக்குத்து t -ஐ மதிப்பை இதற்கிட்டு

$$\frac{g(1+t^2)}{2U^2t} = \frac{1ab}{b^2(b^2+a^2+ab)} \left[\frac{b^2+a^2+ab}{a} - a \right]$$

$$= \frac{a}{b(b^2+a^2+ab)}$$

$$= \frac{b^2+ab}{b(a^2+b^2+ab)}$$

$$= \frac{a+b}{a^2+b^2+ab}$$

$$\therefore \text{கிடைச்செயல்} = \frac{a^3+b^3+ab}{a+b}$$

11. கொடுக்கப்பட்ட வீச்செயலை R -ஐ அடைய, ' U ' என்ற ஆரம்பத் திசைவேகத்துடன் விடப்படும் விசு துகள்கள் அடையும் மிக அதிக உயரங்கள் ' h ', ' H ' என்றும் $16hH = R^2$ என்று திருப்தி.

$$R = \frac{U^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$\therefore \sin 2\alpha =$ மாநிலியாகும்.

$$2\alpha = \theta \text{ அல்லது } 180 - \theta \text{ ஆகும்.}$$

$$\alpha = \frac{\theta}{2} \text{ அல்லது } 90 - \frac{\theta}{2}.$$

அப்போது மிக அதிக உயரம்.

$$h = \frac{U^2}{2g} \sin^2 \alpha$$

$$= \frac{U^2}{2g} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$H = \frac{U^2}{2g} \sin^2 \left(90 - \frac{\theta}{2} \right)$$

$$= \frac{U^2}{2g} \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\begin{aligned}
 16k H &= 16 \frac{U^4}{4g^3} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \\
 &= 4 \frac{U^4}{g^3} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \\
 &= \frac{U^4}{g^3} \sin^2 \theta \\
 &= \left[\frac{U^2 \sin \theta}{g} \right]^2 \left[\alpha = \frac{\theta}{2} \text{ என்பதால் } 2\alpha = \theta \text{ ஆகிறது} \right] \\
 &= R^2
 \end{aligned}$$

12. தரையைத் தொட்டவுடன் வேகமும் ஒரு குண்டின் சிதறும் திசையும் நான்குமும் சிதறுகின்றன. சிதறும் குண்டுகளில் மிக அதிகமான திசையேகம் 80 அடிகளிலிருந்து 100' எட்டதூரத்திலுள்ள ஒரு மனிதன் $\frac{5}{\sqrt{2}}$ வீதமாகுக்கு அபாயத்திலிருப்பானெனக் காண்பி.

$$U = 80 \quad R = 100$$

$$R = \frac{U^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$$\frac{40}{32} = \frac{5}{g}$$

$$100 = \frac{80 \times 80}{32} \sin 2\alpha$$

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$2\alpha = 30^\circ, 150^\circ$$

$$\alpha = 15^\circ, 75^\circ$$

எனவே இருண்டு வீச்சுக் கோணங்களுண்டு.

வீச்சுக் கோணம் 15° ஆக இருக்கும்போது, கொடுக்கப்பட்ட வீச்செல்மையைவிட எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம்,

$$\begin{aligned}
 t_1 &= \frac{2U \sin \alpha}{g} \\
 &= \frac{2 \times 80}{32} \times \sin 15^\circ \\
 &= 5 \times \sin 15^\circ
 \end{aligned}$$

எதிர்பொருள்வர்

கோணம் 75° ஆகும்போது எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம்,

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{2 \times 80}{32} \times \sin 75^\circ \\ &= 5 \times \sin 75^\circ \end{aligned}$$

எனவே அபாயத்துக்குரிய நேரம்

$$\begin{aligned} &= 5 \sin 75^\circ - 5 \sin 15^\circ \\ &= 5 \times 2 \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= 10 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} \\ &= 5 \sqrt{2} \text{ விநாடிகள்} \end{aligned}$$

13. விநாடிக்கு 64 அடிகள் வேகத்தில் எறியப்படும் ஒரு கல், அதற்கு நேர் எதிராக 48 அடி தூரத்திலுள்ள ஒரு அவரின் 19 அடி உயரத்திலுள்ள ஒரு பொருளைச் சென்று அடைகிறது. அப்படியானால் வீச்சுத்திசை, பொருளைத் தொடும்போது கல்லுக்குள்ள திசைவேகம் கிடைவதைக் கண்டுபிடி.

‘ α ’ வீச்சுக் கோண வெள்ளும், கிடை, நிழல், திசைவேகங்கள் முறையே $64 \cos \alpha$, $64 \sin \alpha$ ஆகும்.

$$\therefore 48 = 64 \cos \alpha \quad \#$$

$$19 = 64 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\therefore 19 = \sin \alpha \frac{48}{\cos \alpha} - \frac{g}{2} \left(\frac{48}{64 \cos \alpha} \right)^2$$

$$19 = 48 \tan \alpha - \frac{9g}{32} (1 + \tan^2 \alpha)$$

$$\therefore 9t^2 - 48t + 28 = 0 \quad (t = \tan \alpha \text{ என்று கொண்டால்)}$$

$$9t^2 - 42t - 6t + 28 = 0$$

$$3t(3t - 14) - 2(3t - 14) = 0$$

$$(3t - 2)(3t - 14) = 0$$

$$\therefore \tan \alpha = t = \frac{2}{3} \text{ அல்லது } \frac{14}{3}$$

அப்போது கல்லின் கிடை, நிழல் திசை வேகக் கூறுகள் முறையே

$$64 \cos \alpha, \quad 64 \sin \alpha - gT$$

$$\begin{aligned} &= 64 \cos \alpha, \quad 64 \sin \alpha - \frac{32 \times 14}{64} \sec \alpha \\ &= 64 \cos \alpha, \quad 64 \sin \alpha - 24 \sec \alpha \end{aligned}$$

எனவே விசையு திசைவேகம்

$$= \sqrt{64^2 \cos^2 \alpha + (64 \sin \alpha - 24 \sec \alpha)^2}$$

$$= \sqrt{64^2 + 24^2 \sec^2 \alpha - 2 \times 24 \times 64 \tan \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{2}{3} \text{ ஆகும்போது,}$$

$$\text{திசைவேகம்} = \sqrt{4096 + 576(1 + \frac{4}{9}) - 128 \times 24 \times \frac{2}{3}}$$

$$= \sqrt{4096 + \frac{576 \times 13}{9} - 2048}$$

$$= \sqrt{2948 + 832}$$

$$= \sqrt{2900}$$

$$= 10 \sqrt{29} \text{ அடிகள்/விநாடி}$$

$$\tan \alpha = \frac{2}{3} \text{ ஆகும்போது,}$$

$$\text{திசைவேகம்} = \sqrt{4096 + 576(1 + \frac{196}{9}) - 128 \times 24 \times \frac{14}{3}}$$

$$= \sqrt{4096 + 64 \times 205 - 14336}$$

$$= \sqrt{4096 + 13120 - 14336}$$

$$= \sqrt{17216 - 14336}$$

$$= \sqrt{2880}$$

$$= 12 \sqrt{20} \text{ அடிகள்/விநாடி}$$

அப்போது திசை வேகத்தின் திசைகக் குறையே

$$\tan \theta = \frac{64 \sin \alpha - 24 \sec \alpha}{64 \cos \alpha}$$

$$= \tan \alpha - \frac{3}{8} [1 + \tan^2 \alpha]$$

$$\tan \alpha = \frac{2}{3} \text{ என்றால்}$$

$$\tan \alpha = \frac{14}{3} \text{ என்றால்}$$

$$\tan \theta = \frac{2}{3} - \frac{3}{8} \left(1 + \frac{4}{9} \right)$$

$$\tan \theta = \frac{14}{3} - \frac{3}{8} \left(1 + \frac{196}{9} \right)$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{3}{8} \times \frac{13}{9}$$

$$= \frac{14}{3} - \frac{3}{8} \times \frac{205}{9}$$

$$= \frac{3}{24}$$

$$= -\frac{93}{24}$$

இங்கு விசையு திசைவேகம் கிடைத்தியைவுடன் கூண்டாகத்தும் கோணம் θ ஆகும்.

$$\therefore \theta = \tan^{-1} \frac{3}{24} \text{ அல்லது } 180^\circ - \tan^{-1} \frac{3}{24} \text{ ஆகும்.}$$

14. வீச்சுப் புள்ளியிலிருந்து 'a' கிடைதூரத்திலும் 'b' நிலை தூரத்திலும் P என்ற புள்ளியுள்ளது. ஆரம்பத் திசையேகம் 'U'-யுடன் செலுத்தப்படும் எதிரொள்கு P-ன் வழியாகச் செல்லவேண்டுமானால் $U^2 < g[b + \sqrt{a^2 + b^2}]$ ஆக இருக்கவேண்டுமெனக் காண்பி.

(a, b) அச்சு தூரங்களுடைய P என்ற புள்ளி எதிரொள்கின் மெய்குக்க வேண்டுமானால்,

$$b = a \tan \alpha = \frac{ga^2}{2U^2} (1 + \tan^2 \alpha)$$

$$ga^2t^2 - 2U^2at + (ga^2 + 2U^2b) = 0 \quad [t = \tan \alpha \text{ என்றால்}]$$

கீழ்க்கச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யாக இருக்க இதன் தன்மை காட்டி > 0 ஆக வேண்டும்.

$$4U^4a^2 - 4ga^2(ga^2 + 2U^2b) > 0$$

$$U^4 - 2gbU^2 - a^2g^2 > 0$$

$$(U^2 - gb)^2 > a^2g^2 + g^2b^2$$

$$(U^2 - gb)^2 > g^2(a^2 + b^2)$$

$$U^2 - gb > g\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\therefore U^2 > g[b + \sqrt{a^2 + b^2}]$$

குறிப்பு : $U^2 < g[b + \sqrt{a^2 + b^2}]$ என்றும் சமன்பாட்டின் தன்மை காட்டி < 0 ஆகும்.

\therefore மூலங்கள் மெய்யானவை ஆக இருக்காது.

15. 'U', 'V' என்ற திசை நிலை உறுகலாயுடைய திசையேகத் துடன் ஒரு குண்டு கடப்படுகிறது. 't' நேரங்கழித்து அதன் கிடை தைக் கண்டுபிடி. கிடை திசையேகம் விதரவுக்கு 2000 அடிகள் என்றால், 500 செலு தூரத்தில் குண்டை விட 6 அடிகள் அதிக உயர மூன்றை ஒரு பொருளைக் கடவேண்டுமானால், குண்டு கடப்படும் ஏற்றக் கோணத்தைக் கண்டுபிடி.

't' நேரங்கழித்துக் குண்டின் கிடைதை (x, y) என்ற அச்சுத் தூரத்தால் குறிப்பிட்டால்

$$x = Ut$$

$$y = Vt - \frac{1}{2}gt^2$$

$$U = 2000 \text{ என்றால்}$$

$$x = Ut$$

$$1500 = 2000t$$

$$\therefore t = \frac{3}{4} \text{ விதரவு}$$

$$y = Vt - \frac{1}{2}gt^2$$

$$6 = V \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \times 32 \times \frac{9}{16}$$

$$15 = V \cdot \frac{3}{4}$$

$$\therefore V = 20 \text{ அடிகைர்/விநாடி}$$

' θ ' ஏற்றக் கோணமாகும்

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{V}{U} \\ &= \frac{20}{2000} \\ &= \frac{1}{100} \end{aligned}$$

$$\therefore \theta = 3\frac{1}{2}^\circ \text{ திமிடங்கை (ஏறக்குறைய)}$$

16. 'O' என்ற புள்ளியிலிருந்து, ஒரே திசையிலேயே இருந்து நிற்பவர்கள் 'a', 'b' என்ற வீச்சுக் கோணங்களுடன் இயங்கி 'O'-ன் வழியாக வரையப்படும் கிடை சமதளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியை நோக்கிச் செல்கின்றன. முதல் பொருள் புள்ளிக்கு a அடிகைர் மூன்றை விழுகிறது. நிரண்டாவது பொருள் புள்ளியைத் தாண்டி 'b' அடிகைர் தள்ளி விழுகிறது. புள்ளியில் பொருள் வந்து சேர சரிவான வீச்சுக் கோணம் θ என்றால்

$$(a+b) \sin 2\theta = a \sin 2\beta + b \sin 2\alpha$$

என்று திருப்தி.

ஆரம்பத் திசையிலேயே U அடிகைர்/விநாடி என்றும், d அடிகைர் தூரத் தில் புள்ளி விழும்பதரவுகள் எடுத்துக்கொள்ளுவோம்.

$$\text{வீச்செல்லம்} = \frac{U^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$\therefore d-a = \frac{U^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$$d+b = \frac{U^2 \sin 2\beta}{g}$$

$$d = \frac{U^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$\therefore a + \frac{U^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{U^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$a = \frac{U^2}{g} [\sin 2\theta - \sin 2\alpha]$$

$$\frac{U^2 \sin^2 \beta}{g} = \frac{U^2 \sin 2\theta}{g} + b$$

$$b = \frac{U^2}{g} [\sin 2\beta - \sin 2\theta]$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{\sin 2\theta - \sin 2\alpha}{\sin 2\beta - \sin 2\theta}$$

$$a \sin 2\beta - a \sin 2\theta = b \sin 2\theta - b \sin 2\alpha$$

$$a \sin 2\beta + b \sin 2\alpha = (a+b) \sin 2\theta$$

17. 'U', 'V' என்பவைகளைக் கிடை, நிலைகூறுகளாகவுடைய திசை வேகத்துடன் ஒரு பொருள் எறியப்படுகிறது. வீச்சுப் புள்ளியிலிருந்து 'h' என்ற கிடை தூரமும் 'K' என்ற நிலைதூரமும்கூட ஒரு புள்ளியை எதிரொருக்கல் சென்று விடக்கூடியது. $2U^2K + gh^2 = 2UVh$ என்று திருப்தி.

புள்ளியை எதிரொருக்கல் சென்று விடக்கூடிய எடுத்துக்கோள்களும் நேரம் t என்றும்

$$h = Ut$$

$$K = Vt - \frac{1}{2}gt^2$$

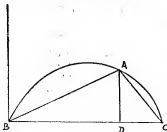
$$\therefore K = V \cdot \frac{h}{U} - \frac{g}{2} \frac{h^2}{U^2}$$

$$2U^2K = 2UVh - gh^2$$

$$\therefore 2U^2K + gh^2 = 2UVh$$

18. BCஐ கிடைநிலையிலுள்ளதாக ABC என்ற ஒரு முக்கோணம் உள்ளது. B-யிலிருந்து எறியப்படும் ஒரு பொருள் Aஐத் தொட்டுக் கொண்டு சென்று Cஐ விடக்கூடியது. வீச்சுக்கோணம் θ என்றும்

$$\tan \alpha = \tan B + \tan C$$



படம் 63.

ஆரம்பத் திசையேனும் 'U' என்றும் எதிர்ப்பாருள் AB அனைய எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் 't' என்றும் இருந்தாக, $BD = U \cos \alpha \cdot t$

$$\therefore DA = U \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan B &= \frac{DA}{BD} \\ &= \frac{U \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2}{U \cos \alpha \cdot t} \\ &= \frac{U \sin \alpha - \frac{1}{2} g t}{U \cos \alpha} \\ &= \tan \alpha - \frac{g t \sec \alpha}{2U} \end{aligned} \quad \dots\dots(1)$$

BC = வீச்செகிலி

$$= \frac{U^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$$\begin{aligned} \tan C &= \frac{DA}{BC} \\ &= \frac{U \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2}{\frac{U^2 \sin 2\alpha}{g} - U \cos \alpha \cdot t} \\ &= \frac{g t [U \sin \alpha - \frac{1}{2} g t]}{U \cos \alpha [2U \sin \alpha - g t]} \\ &= \frac{g t}{2U \cos \alpha} = \frac{g t}{2U} \cdot \sec \alpha \end{aligned} \quad \dots\dots(2)$$

(1)+(2) என்றால்

$$\tan B + \tan C = \tan \alpha \text{ ஆகும்.}$$

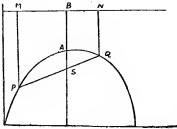
19. வீச்செகிலி பாதையின் உச்சியில் எதிர்ப்பாருளின் திசையேனும் 'V' என்றும் அதன் குவிப நான்கில் இரு முனைகளில் திசையேனும் 'V₁', 'V₂' என்றும் இருந்தாக, $V_1^{-2} + V_2^{-2} = V^{-2}$ என்று திருபி.

'S' என்பது எதிர்ப்பாருள் பாதையான புவனியின் குவிபமாகும். MN அதன் இயக்குவையாகும்.

$$\therefore SP = PM$$

$$SQ = QN$$

$$SA = AB$$



படம் 64.

PSQ , குவிய நகல் என்றும்

$$\frac{1}{SP} + \frac{1}{SQ} = \frac{1}{SA} \text{ ஆகும்} \quad \dots\dots(1)$$

எதிர்பொருளில் பாதையிலுள்ள ஒரு புள்ளியின் திசைவேகம், அதற்கு நேர் உயரே இயக்குவகையிலுள்ள புள்ளியிலிருந்து நகரு தளையின்மீடு பொருள் விரும்பியது உண்டாகும் திசைவேகத்துக்குச் சமமென நாம் அறிவோம்.

$$\begin{aligned} \text{எனவே } V_1^2 &= 2g \cdot PM \\ &= 2g \cdot SP \\ V_2^2 &= 2g \cdot QN \\ &= 2g \cdot SQ \\ V^2 &= 2g \cdot AB \\ &= 2g \cdot SA \end{aligned}$$

(1) சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\frac{2g}{V_1^2} + \frac{2g}{V_2^2} = \frac{2g}{V^2}$$

$$V_1^{-2} + V_2^{-2} = V^{-2} \text{ ஆகும்.}$$

20. ஒரு எப்பன் 'U' திசைவேகத்துடன் 'd' ஏற்றக் கோணத்தில் ஒரு கம்பை வீசுகிறார். சில விநாடிகள் கழித்து, 'V' திசைவேகத்துடன் θ ஏற்றக் கோணத்தில் மற்றொரு கம்பை வீசுகிறார். இரண்டாவது

கல், முதல் கல்லைத் தட்டவேண்டுமானாலும், இரண்டு கற்கள் வீசப்படும் நேரங்களுக்கிடையேயுள்ள இடைவெளி நேரத்தைக் கண்டுபிடி.

முதல் கல் எதிர்ப்பட்ட நேரத்திலிருந்து 't' விநாடிகள் கழித்து, முதல் கல் இரண்டாவது கல்லைச் சந்திப்பதாகக் கொள்வோம். இரண்டு கற்கள் வீசப்படும் நேரங்களுக்கிடையேயுள்ள இடைவெளி 'T' விநாடிகள் என்று கொள்வோம்.

இரண்டு கற்கள் சந்திக்கும் இடத்தின் அச்ச தூரங்களை (x, y) என்று கொண்டால்

$$x = U \cos \alpha \cdot t \quad \dots\dots(1)$$

$$y = U \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \dots\dots(2)$$

$$x = V \cos \beta \cdot (t - T) \quad \dots\dots(3)$$

$$y = V \sin \beta \cdot (t - T) - \frac{1}{2}g(t - T)^2 \quad \dots\dots(4)$$

(1), (3) சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$U \cos \alpha \cdot t = V \cos \beta \cdot (t - T)$$

$$V \cos \beta \cdot T = t(V \cos \beta - U \cos \alpha)$$

$$\therefore t = \frac{V \cos \beta \cdot T}{V \cos \beta - U \cos \alpha} \quad \dots\dots(5)$$

(2), (4) சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$U \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = V \sin \beta \cdot (t - T) - \frac{1}{2}g(t - T)^2$$

$$t(U \sin \alpha - V \sin \beta) + V \sin \beta \cdot T = \frac{1}{2}g[t^2 - t^2 + 2tT - T^2]$$

(5)-ஐக் 't' மதிப்பைக் கொண்டு

$$\frac{(U \sin \alpha - V \sin \beta) \cdot V \cos \beta \cdot T}{V \cos \beta - U \cos \alpha} + V \sin \beta \cdot T$$

$$= \frac{1}{2}g \left[\frac{2T \cdot V \cos \beta \cdot T}{V \cos \beta - U \cos \alpha} - T^2 \right]$$

$$\frac{(U \sin \alpha - V \sin \beta) \cdot V \cos \beta}{(V \cos \beta - U \cos \alpha)} + V \sin \beta$$

$$= \frac{1}{2}gT \left[\frac{2V \cos \beta - V \cos \beta + U \cos \alpha}{V \cos \beta - U \cos \alpha} \right]$$

$$UV [\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta]$$

$$= \frac{1}{2}gT [V \cos \beta + U \cos \alpha]$$

$$UV \sin (\alpha - \beta) = \frac{1}{2}gT [V \cos \beta + U \cos \alpha]$$

$$\therefore T = \frac{2UV \sin (\alpha - \beta)}{g(V \cos \beta + U \cos \alpha)}$$

21. ஒரே நிலை சமதளத்தில், ஒரு புள்ளியிலிருந்து, வீசப்படும் துகள்கள் சமபரவளைவுப் பாதைகளில் இயங்கினால், அவைகளின் குவியங்கள், வேறொரு பரவளைவில் மேலிருக்குமெனக் காண்பி.

பரவளைவுகளின் செவ்வகங்கள்

$$= \frac{2 U^2 \cos^2 \alpha}{g} = \text{மாநிலி எனது கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.}$$

எனவே $= K$ என்று கொள்ளவும்.

பரவளைவுகளின் குவியங்களின் அச்ச தூரங்கள் மூன்றையே

$$\frac{U^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}, \frac{U^2 \sin^2 \alpha}{g} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore x = \sin \alpha \cdot \frac{K}{2 \cos^2 \alpha} \cdot \cos \alpha$$

$$= \frac{K}{2} \tan \alpha$$

$$y = \sin^2 \alpha \cdot \frac{K}{2 \cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{K}{2} \cdot \tan^2 \alpha$$

$$\therefore \frac{2y}{K} = \left(\frac{2x}{K} \right)^2$$

$$y = \frac{2x^2}{K}$$

\therefore குவியங்கள் ஒரு பரவளைவின்மேல் அமைவும்.

22. 256 அடி உயரமுள்ள மலை உச்சியிலிருந்து 30° வீச்சுக் கோணத்தில் 192 அடிகள்/விநாடி திசைவேகத்துடன் ஒரு பொருள் எறியப்படுகிறது. அது மலையிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் விழுமென்று கண்டுபிடி.

$$\begin{aligned} \text{ஆரம்ப நிலை திசைவேகம்} &= 192 \sin 30^\circ \\ &= 96 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ஆரம்பக் கிடை திசை வேகம்} &= 192 \cos 30 \\ &= 96 \cdot \sqrt{3} \end{aligned}$$

256 அடிகள் நிலைதூரத்தை அடைய

$$\begin{aligned} -256 &= 96 \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \\ &= 96t - 16t^2 \end{aligned}$$

$$t^2 - 6t - 16 = 0$$

$$(t+2)(t-8) = 0$$

$$t = 8 \text{ விநாடிகள்}$$

$$t = -2 \text{ எதிர்நிலைநேரமல்லாதது}$$

$$\text{இந்த நேரத்தில் கிடைதூரம்} = 96 \cdot \sqrt{3} \times 8$$

$$= 768 \times \sqrt{3}$$

$$= 1330 \text{ அடிகள் [ஏறக்குறைய]}$$

23. மலை உச்சியிலிருந்து 200 அடிகள் கிடைதூரமும், 200 அடிகள் நிலைதூரமும் கிழேயுள்ள ஒரு பொருளைத் தொடும்படி, மலை உச்சியிலிருந்து ஒர் எறிபொருள் வீசப்படுகிறது. மூலமிருந்து பூமியின் எதிர்ப்புச் சக்திக்குக் கட்டுப்பட்டு 100 அடிகள் உயரத்திலிருந்து விரும்பும் போது ஏற்படும் திசைவேகத்துடன் எறிபொருள் வீசப்படுகிறது. அப்போது உண்டாகும் வீச்சுத் திசைகள் கிரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக வுள்ளவையென்று காணாயி.

100 அடிகள் உயரத்திலிருந்து விரும்புபோது

$$U^2 = 2g \times 100$$

$$= 6400$$

$$\therefore U = 80$$

திசைக் கோணம் ' α ' என்றால்

$$-200 = 80 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$200 = 80 \cdot \cos \alpha \cdot t$$

$$t = \frac{5}{2} \sec \alpha$$

$$\therefore -200 = 80 \cdot \frac{5}{2} \sec \alpha \sin \alpha - 16 \cdot \frac{25}{4} \sec^2 \alpha$$

$$= 200 \tan \alpha - 100 (1 + \tan^2 \alpha)$$

$$t^2 - 2t - 1 = 0 \quad [t = \tan \alpha \text{ என்றால்}]$$

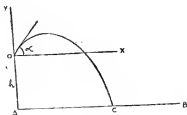
$$t = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$t_1 = 1 + \sqrt{2}, t_2 = 1 - \sqrt{2} \text{ என்று எடுத்துக்கொண்டால்}$$

$$t_1 \cdot t_2 = -1$$

\therefore வீச்சுத் திசைகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம் 90° என்றாகிறது.

24. கிடை சமதளத்திலிருந்து ' h ' உயரத்திலுள்ள ஒரு புவிமீயிலிருந்து $\sqrt{2}gh$ என்ற திசைவேகத்துடன் ஒரு துகள் எறியப்படுகிறது. உச்ச வீச்செல்லுமையும், அதை அடைவதற்குள்ள ஆரம்ப வீச்சுக் கோணத்தையும் காண்க.



படம் 65.

' α ' எக்சுபதை ஆரம்ப வீச்சுக் கோணமாகக் கொள்வோம். திசை வேகத்தின் கிடை, திசை கூறுகள் $\sqrt{2ag} \cos \alpha$, $\sqrt{2ag} \sin \alpha$ ஆகும்.

$$\therefore -h = \sqrt{2ag} \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \dots (1)$$

$$\text{அப்போது கிடைதூரம் } x = \sqrt{2ag} \cos \alpha \cdot t \quad \dots (2)$$

(1), (2)-ஐக் குத்தி ' t 'ஐ நீக்குக.

$$\begin{aligned} -h &= \sqrt{2ag} \frac{\sin \alpha \cdot x}{\sqrt{2ag} \cos \alpha} - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{2ag \cos^2 \alpha} \\ &= x \tan \alpha - \frac{gx^2}{4ag} (1 + \tan^2 \alpha) \\ &= xt - \frac{gx^2(1+t^2)}{4ag} \quad (t = \tan \alpha \text{ என்றால்}) \end{aligned}$$

' x '-ஐ உச்ச மதிப்பைக் காண

$$\frac{dx}{dt} = 0 \text{ என்றும் } \frac{d^2x}{dt^2} \text{ குறை குறியுடனும் இருக்கவேண்டும்}$$

$$0 = x + t \frac{dx}{dt} - \frac{g}{4ag} \left[x^2 2t + (1+t^2) 2x \frac{dx}{dt} \right]$$

$$\frac{dx}{dt} \left[\frac{2gx(1+t^2)}{4ag} - t \right] = x - \frac{2gtx^2}{4ag} = x - \frac{tx^2}{2a}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dx}{dt} &= \frac{2ax - tx^2}{2a} \cdot \frac{2a}{x(1+t^2) - 2at} \\ &= \frac{x(2a - tx)}{x(1+t^2) - 2at} \end{aligned}$$

$$\therefore 2a - tx = 0$$

$$\therefore t = \frac{2a}{x}$$

[$\alpha = 90^\circ$ இருக்கும்போது துகள் மேல்நோக்கிச் சென்று மிகு A -ல் வந்து விழும்; அப்போது $x=0$ ஆகும்]

$$\therefore -h = x \cdot \frac{2a}{x} - \frac{x^2}{4a} \left(1 + \frac{4a^2}{x^2}\right)$$

$$= 2a - \frac{x^2}{4a} - a$$

$$= a - \frac{x^2}{4a}$$

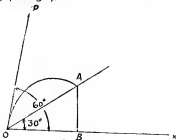
$$\frac{x^2}{4a} = a + h$$

$$x = 2\sqrt{a(a+h)}$$

எனவே உச்ச வீச்செல்லை $= 2\sqrt{a(a+h)}$ ஆகும்

அப்போது $\tan \alpha = \frac{2a}{2\sqrt{a(a+h)}} = \sqrt{\frac{a}{a+h}}$ ஆகும்.

25. 30° சாய்வுள்ள ஒரு சமதளத்தின் அடியிலிருந்து 60° வீச்சுக் கோணத்துடன் வீறாவுக்கு 900 அடிகள் திசைவேகத்தில் ஒரு துகள் வீசப்படுகிறது. சாய்வுளத்தின்மேல் வீச்செல்லைகளையும், பறக்கும் நேரத்தையும் கண்டுபிடி.



படம் 66.

சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையில், திசைவேகத்தின் கூறு

$$= 900 \sin 30^\circ$$

$$= 450 \text{ அடிகள்/விநாடிகள்}$$

இத்தத் திசையில் முடுக்கம் $= g \cos 30^\circ$

$$= 32 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 16\sqrt{3} \text{ அடிகள்/விநாடி}^2$$

சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையில் துகள் செல்லும் தூரம் $= 0$

$$0 = 450t - \frac{1}{2} 16\sqrt{3} \cdot t^2$$

$$\therefore t = \frac{2 \times 450}{16\sqrt{3}}$$

$$= \frac{75\sqrt{3}}{4} \text{ விநாடிகள்} = 32.5 \text{ விநாடிகள் [ஏறக்குறைய]}$$

இத்தோத்தில் துகள் இயங்கும் கிடைதூரம்

$$OB = 900 \times \cos 60^\circ \times \frac{75}{4} \sqrt{3}$$

$$= 900 \times \frac{1}{2} \times \frac{75}{4} \sqrt{3}$$

$$\therefore OA = OB \cdot \sec 30^\circ$$

$$= \frac{225}{8} \times \frac{75 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \times 2$$

$$= 16,875 \text{ அடிகள்}$$

26. 'α' சாயவு கோணத்தையுடைய சாய்தளத்தில் கீழ்தோக்கி எறிபொருள் ஒரு திசைவேகத்துடன் இயங்கும்போது உண்டாகும் உச்ச வீச்செல்லுக்கும் சாய்தளத்தின் மேல்தோக்கி எறிபொருள் அதே திசைவேகத்துடன் இயங்கும்போது ஏற்படும் உச்ச வீச்செல்லுக்கு கிடைவேயுள்ள விகிதம் $= (1 + \sin \alpha) / (1 - \sin \alpha)$ என்று திருப்தி.

வீச்சுத் திசைவேகம் 'U' என்றும், வீச்சுத் திசைக்கும், சாய்தளத் திற்றியிடையேயுள்ள கோணம் θ என்றும் கொள்வோம். சாய்தளத்துக்குச் செங்குத்துத் திசையில் திசைவேகத்தின் கூறு $U \sin \theta$ ஆகவும், பூமியின் ஈர்ப்புச் சக்தியினால் ஏற்படும் முடுக்கின் கூறு $= g \cos \alpha$ ஆகவும் இருக்கும்.

$$\therefore 0 = U \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g \cos \alpha \cdot t^2$$

$$\therefore t = \frac{2U \sin \theta}{g \cos \alpha}$$

கித்தொரத்தில் கிடைதிறையில் தூண் இயங்கும் தூரம்

$$= U \cos (\theta + \alpha) \frac{2U \sin \theta}{g \cos \alpha}$$

∴ ஈனவே சாய்நளத்தின் மேல் வீச்செல்லை

$$= U \cos (\theta + \alpha) \frac{2U \sin \theta}{g \cos \alpha} \cdot \sin \alpha$$

$$= \frac{U^2}{g^2 \cos^2 \alpha} [\sin (2\theta + \alpha) - \sin \alpha]$$

கித்த வீச்செல்லை உச்சத்தையடைய

$$\sin (2\theta + \alpha) = 1 \text{ ஆகவேண்டும்}$$

$$\text{அப்போது உச்ச வீச்செல்லை} = \frac{U^2}{g^2 \cos^2 \alpha} (1 - \sin \alpha)$$

சாய்நளத்தின் கீழ்தொக்கி தூண் இயங்கும் போது,

$$0 = U \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g \cos \alpha \cdot t^2$$

$$\therefore t = \frac{2U \sin \theta}{g \cos \alpha}$$

கித்தொரத்தில் கிடைதிறையில் தூண் இயங்கும் தூரம்

$$= U \cos (\theta - \alpha) \frac{2U \sin \theta}{g \cos \alpha}$$

ஈனவே சாய்நளத்தின் மேல் வீச்செல்லை

$$= \frac{U \cos (\theta - \alpha)}{g \cos \alpha} \frac{2U \sin \theta}{g \cos \alpha} \sec \alpha$$

$$= \frac{U^2}{g^2 \cos^2 \alpha} [2 \sin \theta \cos (\theta - \alpha)]$$

$$= \frac{U^2}{g^2 \cos^2 \alpha} [\sin (2\theta - \alpha) + \sin \alpha]$$

ஈனவே கித்த வீச்செல்லை உச்சமாக இருக்க வேண்டுமானால்,

$$\sin (2\theta - \alpha) = 1 \text{ ஆகவேண்டும்}$$

$$\text{அப்போது உச்ச வீச்செல்லை} = \frac{U^2}{g^2 \cos^2 \alpha} (1 + \sin \alpha)$$

ஈனவே உச்ச வீச்செல்லையின் விவரம்

$$= \frac{U^2}{g^2 \cos^2 \alpha} (1 + \sin \alpha)$$

$$\frac{U^2}{g^2 \cos^2 \alpha} (1 - \sin \alpha)$$

$$= \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}$$

27. சாய்தளத்தின்மேல் செங்குத்தப்பட்ட வீச்செல்லையை அடைய துடன் எடுத்துக் கொள்ளும் தோள்கள் t_1 அல்லது t_2 என்றும்

$t_1^2 + t_2^2 + 2t_1 t_2 \sin \alpha$ என்பது 'உ'ய் கொடுத்ததற்கு என்று நிரூபி.

(α = சாய்தளத்தின் சாயவு கோணமாகும்)

வீச்சுத் திசையெண் 'U' என்றும், வீச்சுத் திசை சாய்தளத்தடல் உண்டாகும் கோணம் ' θ ' எனவும் எடுத்துக்கொள்வ.

$$\therefore 0 = U \sin \theta - \frac{1}{2} g \cos \alpha t^2$$

$$\therefore t = \frac{2U \sin \theta}{g \cos \alpha} \quad \dots\dots(1)$$

மிந்நேரத்தில் சாய்தளத்தின்மேல் வீச்செல்லை

$$R = U \cos \theta - \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2 \quad \dots\dots(2)$$

(1)-மிருத்த $U \sin \theta t = \frac{1}{2} g \cos \alpha t^2$

(2)-மிருத்த $U \cos \theta t = R + \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2$

$$\therefore U^2 t^2 = \frac{g^2 t^4}{4} + R^2 + gR \sin \alpha t^2$$

$$\therefore g^2 t^4 + 4 t^2 (gR \sin \alpha - U^2) + 4R^2 = 0$$

இது ' t^2 'ல் ஒரு மிகுபடி சமன்பாடாகும். எனவே இதன் மூலங்கள் t_1^2, t_2^2 என்றும்

$$t_1^2 + t_2^2 = \frac{4}{g^2} (U^2 - gR \sin \alpha)$$

$$t_1^2 \cdot t_2^2 = \frac{4}{g^2} R^2$$

$$\begin{aligned} \therefore t_1^2 + t_2^2 + 2t_1 t_2 \sin \alpha &= \frac{4U^2}{g^2} - \frac{4R \sin \alpha}{g} + \frac{4R \sin \alpha}{g} \\ &= \frac{4U^2}{g^2} \\ &= \text{'உ'ய் கொடுத்ததற்கு.} \end{aligned}$$

28. கிடைதிறையுடன் ' β ' கோணத்தை உண்டாக்கும் சாய்தளத்தின் அடியிலிருந்து 'உ' வீச்சுக் கோணத்தடல் ஒரு துண் எறிபப் படுகிறது. அது சாய்தளத்தைத் செங்குத்துத் திசையில் தாக்க வேண்டுமானால், (1) $\cot \beta = 2 \tan (\alpha - \beta)$ (2) $\cot \beta = \tan \alpha - 2 \tan \beta$ என்றும் மிகுக்க வேண்டும்.

U -ஐ மீச்சுத் திசைவேகமாகக் கொள்க. சாய்ந்தளத்திற்குச் செங்குத்தாகத் திசையில் திசைவேகத்தின் கூறு $U \sin (\alpha - \beta)$ என்றும் 'g'-ன் கூறு $g \cos \beta$ என்றும் ஆகும்.

't' நேரத்தில் துகள் மீண்டும் சாய்ந்தளத்தை அடைந்தால்

$$0 = U \sin (\alpha - \beta) t - \frac{1}{2} g \cos \beta \cdot t^2$$

$$\therefore t = \frac{2U \sin (\alpha - \beta)}{g \cos \beta} \quad \dots(1)$$

சாய்ந்தளத்தை மீண்டும் அடையும்போது துகளின் திசைவேகம் சாய்ந்தளத்திற்குச் செங்குத்தாக இருக்க வேண்டுமானால், அப்போது சாய்ந்தளத்தின் திசையில் திசைவேகத்தின் கூறு = 0

$$0 = U \cos (\alpha - \beta) - g \sin \beta \cdot t$$

$$\therefore t = \frac{U \cos (\alpha - \beta)}{g \sin \beta}$$

$$\therefore \frac{2U \sin (\alpha - \beta)}{g \cos \beta} = \frac{U \cos (\alpha - \beta)}{g \sin \beta}$$

$$\therefore 2 \tan (\alpha - \beta) = \cot \beta \text{ ஆகும்,}$$

$$\cot \beta = \frac{2 [\tan \alpha - \tan \beta]}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\therefore \cot \beta + \tan \alpha = 2 \tan \alpha - 2 \tan \beta$$

$$\therefore \cot \beta = \tan \alpha - 2 \tan \beta \text{ ஆகும்}$$

குறிப்பு: துகள் சாய்ந்தளத்தை கிடைதிசையில் தாக்க வேண்டுமானால் $\tan \alpha = 2 \tan \beta$ என்று இருக்கவேண்டும்.

எனவே திசைவேக வேகம் = 0

$$0 = U \sin \alpha - gt$$

$$\therefore t = \frac{U \sin \alpha}{g} \quad \dots(2)$$

(1), (2) சமன்பாடுகளிலிருந்து, tஐ நீக்கினால்

$$\frac{2U \sin (\alpha - \beta)}{g \cos \beta} = \frac{U \sin \alpha}{g}$$

$$2 \sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta$$

$$2 [\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta] = \sin \alpha \cos \beta$$

$$\sin \alpha \cos \beta = 2 \cos \alpha \sin \beta$$

$$\tan \alpha = 2 \tan \beta \text{ என்றாகும்.}$$

30. வீச்சுப் புள்ளியிலிருந்து 'd' அடிகை தூரத்தில் 'h' அடிகை உயரத்திலுள்ள கயருக்குப் பின்னே ஒளித்திருக்கும் ஒரு சிறுவனை நோக்கி V அடிகை/விநாடி என்ற அளவில் விக அதிசுத் திசைவேகத் துடன் சுதகர் எழியப்படுகின்றன. கயருக்குப் பின்னே பாதுகாப்பு மண்டலத்தின் அகலத்தை கண்டுபிடி.

ஆரம்பத் திசைவேகம் 'U' என்றும், 'α' ஆரம்பத் திசைக்கோணமென்றும் கொள்ளவும். இந்தக் கோணத்தில் எழியப்படும் சுதகர் கவர் மேலேயுள்ள புள்ளியைத் தொட்டுக்கொண்டு செல்லும். இந்தப் புள்ளியின் அச்ச தூரங்கள் (d, h) ஆகும். (d, h) என்ற புள்ளி

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 U^2 \cos^2 \alpha} \quad \text{---(1) என்ற வீச்சுப் பாதை}$$

யின் மேலிருக்கும்.

$$h = dt - \frac{g d^2 [1+t^2]}{2 U^2} \quad (2) \quad [t = \tan \alpha] \quad \text{கிடை வீச்செய்கை}$$

$$\begin{aligned} R &= \frac{U^2 \sin 2\alpha}{g} \\ &= \frac{2 U^2 t}{g (1+t^2)} \quad \text{---(3)} \end{aligned}$$

சமன்பாடு (2)-லிருந்து

$$td - h = \frac{g d^2}{2 U^2} (1+t^2)$$

$$\frac{2 U^2}{g (1+t^2)} = \frac{d^2}{dt - h}$$

எனவே சமன்பாடு (3)

$$R = \frac{d^2 t}{dt - h}$$

கல் கயருக்குப் பின்னே விலும் தூரம் கவரிலிருந்து 'p' என்றும்

$$\begin{aligned} p &= R - d \\ &= \frac{d^2 t}{dt - h} - d = \frac{dh}{dt - h} \end{aligned}$$

$$\therefore p = \frac{dh}{d \tan \alpha - h}$$

p குறைபக்குறைவான $\tan \alpha$ அல்லது α அதிகமாகும். 'tan α' மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்க,

சமன்பாடு (7)-ஊக்கு

$$gd^2t^2 - 2U^2dt + (gd^2 + 2U^2h) = 0$$

$$\therefore t = \frac{U^2d \pm \sqrt{U^4d^2 - gd^2(2U^2h + gd^2)}}{gd^2}$$

$$= \frac{U^2 \pm \sqrt{U^4 - g(2U^2h + gd^2)}}{gd}$$

இதிலுள்ள மின்னாடு மதிப்புகளின் அதிகமான மதிப்பை எடுத்துக் கொள்ளுவோம்.

$$\tan \alpha = t = \frac{U^2 + \sqrt{U^4 - g(2U^2h + gd^2)}}{gd}$$

$$p = \frac{hd}{\frac{U^2 + \sqrt{U^4 - g(2U^2h + gd^2)}}{gd}} - h$$

$$= \frac{dhg}{U^2 - gh + \sqrt{U^4 - g(2U^2h + gd^2)}}$$

p குறையக்கூறைய U அதிகமாக வேண்டும்

அதிகப்பட்ச திசையேதனை எடுத்துக்கொண்டால்

$$U = V \text{ ஆகும்}$$

எனவே பாதாபு மண்டலத்தின் அகலம்

$$= \frac{dhg}{V^2 - gh + \sqrt{V^4 - g(2V^2h + gd^2)}}$$

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. விநாயக்கு 600 அடிகள் வேகத்தில் ஒரு குண்டு தப்பாக்கியி லிருந்து வெளிப்படுகிறது. எவ்வளவு அதிகத் தூரத்துக்குக் குண்டு செலுத்தப்பட முடியுமென்று கண்டுபிடிக்க. மேலும் குண்டு எவ்வளவு உயரத்துக்குச் செலுமென்றும் கண்டுபிடிக்க.

2. எறிபொருளின் மிக அதிக உயரம், வீச்சுப் புள்ளியின் வரையாக வரையப்படும் கிடை சமநிலைத்திற்கு மேலே 'h' அடிகள் என்றும், அதன் உயரம் 'h sin² α' என்று இருக்கும் நேரங்களுக்கிடையே யுள்ள கிடைநேரத்தைக் கண்டுபிடிக்க.

['α' என்பது ஏதாவதொரு கோணத்தைக் குறிக்கும்]

3. வீச்சுப்பாதையிலுள்ள செவ்வகத்தின் மூனைகளை வீச்சுப் பொருள் அடைய எடுத்துக்கொள்ளும் நேரத்தைக் கண்டுபிடிக்க.

4. 30° சாய்வுகோணத்தில், விநாயகரு 96 அடிகள் திசைவேகத்தில் ஒரு துக் எறிப்படுகிறது.

(1) எறிபொருள் அடையும் உச்ச உயரம், (2) பறக்கும் நேரம், (3) கிடைவீச்செய்கை இவைகளைக் கண்டுபிடிக்க.

5. ஒரு மலிதளம் ஒரு கல்லை 200 அடிகள் தூரம் எறியுமாயும், அவர் இதனை அடையவேண்டிய ஆரம்பத் திசைவேகத்தைக் கண்டுபிடிக்க.

6. 32 செஜ தூரத்தில், 12 செஜ உயரமுள்ள ஒரு கவரின்மேல் பாகத்தைக் கிடைதிரையில் தாண்டும் எறிபொருளின் ஆரம்பத் திசைவேகத்தைக் கண்டுபிடிக்க.

7. 80 செஜ தூரத்தில், 36 அடி உயரமுள்ள ஒரு கவரை, கிடை திரையுடன் $\tan^{-1} \frac{3}{4}$ கோணத்தை உண்டாக்கி விநாயகரு 100 அடிகள் மூலம் திசைவேகத்துடன் செலுத்தப்படும் துக், தாண்டிச்செல்லுமெனக் காணி.

8. கிடைதிரையுடன் 25° கோணத்தை உண்டாக்கும் திரையில் குண்டு, விநாயகரு 2000 அடிகள் திசைவேகத்துடன் செலுத்தப்படுகிறது. அது அடையும் மிக அதிக உயரத்தையும், வீச்செய்கையையும் கண்டுபிடிக்க.

9. 16 அடிகள் உயரமுள்ள கிடை உருவாக்குள்ளே விநாயகரு 200 அடிகள் திசைவேகத்துடன் செலுத்தப்படும் ஒரு துக் அடையும் உச்ச உயரத்தைக் கண்டுபிடிக்க.

10. கிடைவீச்செய்கை உச்ச உயரத்தைப்போல் மூன்று பங்கு இருக்குமாறு ஒரு பொருள் எறிப்படுகிறது. எந்தத் திரையில் பொருள் எறிப்படவேண்டுமென்று கண்டுபிடிக்க.

11. 13 அடிகள் தூரத்தில், 10 அடிகள் உயரமுள்ள கவரின் மேல் பாகத்தை நோட்டுக்கொண்டு, அதன்மீது 7 அடிகள் தூரத்தில் கிடை சமதளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியைச் சென்று அடையும் எறிபொருளின் ஆரம்பக் குறைந்தபட்ச திசைவேகத்தைக் கண்டுபிடிக்க.

12. 'U', 'V' என்பனவளை கிடை, திசைவேகமாகக் கொண்ட திசைவேகத்துடன் ஒரு குண்டு 'O'-ஈருத்த வெடிக்கப்படுகிறது. விநாயகர் நேரம் எடுத்த குண்டு செல்லும் திசையைக் கண்டுபிடிக்க. $U = 96$ அடிகள்/விநாய, $V = 288$ அடிகள்/விநாய என்றும், குண்டின் பாதையிலுள்ள இரு புள்ளிகளில், குண்டு செல்லும் திசை, அப்போது குண்டையும் 'O'-ஈயும் செக்கும் நேர்க்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகுமென்று திருப்தி.

13. 'V' திசைவேகத்துடன் செலுத்தப்படும் ஒரு எறிபொருள், வீச்சுப் புள்ளியின் வழியாக வரையப்படும் கிடை சமதளத்திலுள்ள

'A' என்ற புள்ளியைச் சென்றடைய முடியும். அதே வீச்சுக்கோணத் துடன் செலுத்தப்படும் மற்றோர் எதிரொள்கள் 'A'-க்கு மேல் 'h' அடிகள் உயரத்திலுள்ள 'B' என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லுமென்றும், வீச்சுத் திசைவேகம் $\frac{V^2}{(V^2 - gh)^2}$ என்றளவுக்கு அதிகரிக்க வேண்டுமென்று காண்பீ.

14. கிடை, திசைவேகக் கூறுகள் மூன்றையே 324 அடிகள்/விநாடி, 216 அடிகள்/விநாடி என்று இருக்குமாறு ஒரு துடன் செலுத்தப் படுகிறது. துடன் அடையும் உச்ச உயரத்தையும், பதக்கும் நேரத்தையும் கண்டுபிடிக்க.

15. 450 அடிகள் கிடை வீச்செல்லையையும் 5 விநாடிகள் பதக்கும் நேரமும் கொண்ட எதிரொள்களின் ஆரம்பத் திசைவேகத்தைக் காணுமிக்க.

16. 100 அடி தூரத்திலே, 50 அடி உயரமுள்ள ஒரு கவருக்குச் சற்று மேலாகச்செல்லும் ஓர் எதிரொள்களின் ஆரம்பத் திசைவேகத்தையும், அதன் திசையையும் கண்டுபிடிக்க.

17. ஓர் எதிரொள்கள் அடையும் உச்ச உயரம் 64 அடிகள். அப்போது அதன் திசைவேகம் 96 அடிகள்/விநாடி ஆகும். வீச்சுக்கோணத்தையும் வீச்செல்லையையும் கண்டுபிடிக்க.

18. கிடைதிசைக்கு 45° கோணத்தில் எறியப்படும் ஒரு பந்து 360 அடிகள் கிடைதூரம் செல்லுகிறது. அது எவ்வளவு நேரம் ஆகையத்திலிருந்தது?

19. ஆரம்பத் திசைவேகம் 'V' என்றும், வீச்சுக்கோணம் 'α' என்றும் உள்ள ஓர் எதிரொள்கள் அடையும் உச்ச உயரம், திசைவேகம் 'kV' என்று அதிகரித்து வீச்சுக்கோணம் 'λ'-ஆம் மூலக்கூறப்படும் போது மாறுபடாது காண்பீ.

[இங்கு $\cot \lambda = k (\cot \lambda - \cot \alpha)$ என்று காண்க]

20. 'V' என்பதை ஆரம்பத் திசைவேகமாகவும் 'α' வீச்சுக்கோணமாகவும் உடைய ஓர் எதிரொள்கள் அடையும் உச்ச உயரம் 'h'-ஆகவும் கிடை வீச்செல்லை 'R'-ஆகவும் இருந்ததால்

$$\frac{V^2}{2g} = h + \frac{R^2}{16h} \text{ என்றும்,}$$

$$\tan \alpha = \frac{4h}{R}$$

என்றும் திருப்தி.

21. α அடிகை வீச்செல்வையை எட்ட ஓர் எறிபொருள் எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் 't' விநாடிகளென்றும், ஆரம்ப வீச்சுக்கொணம் $\tan^{-1} \left(\frac{3t^2}{2\pi} \right)$ என்று காண்பி. மேலும் எறிபொருள் அடைபயம் உச்ச உயரத்தையும், ஆரம்பத் திசைவேகத்தையும் கண்டுபிடிக்க.

22. 'd' வீச்சுக்கொணம், $R =$ கிடை வீச்செல்வ, $T =$ பறக்கும் நேரம் என்றும்

$$gT^2 = 2R \tan \alpha \text{ என்று காண்பி.}$$

$\alpha = 60^\circ$ என்றும், எறிபொருள் $\frac{3R}{4}$ கிடைதூரம் சென்றிருக்கும்போது அதன் உயரத்தைக் கண்டுபிடிக்க.

23. 1200 அடிகை உயரத்திலுள்ள கிடை நேர்க்கோட்டில் ஒரு சண்டை விமானம் மணிக்கு 72 மைல்கள் என்ற வேகத்தில் செல்கிறது. பூமியிலுள்ள ஒரு பொருளைத் தாக்கவேண்டுமானால் அதற்கு நேர்மேலே 1200 அடிகளிலுள்ள கிடைத்த அடைய எவ்வளவு தூரம் இருக்கும் போது, வெடிகண்டு கீழே தள்ளப்படவேண்டும்?

24. P என்ற புள்ளியின் வழியாக விநாடிக்கு 32 அடிகை திசை வேகத்துடன் செலுத்தப்படும் துகளின் வீச்சுக்கொணம் 30° ஆகும். PQ என்பது கிடைவீச்செல்வ. 'd', 'β' என்பவை முறையே P, Q என்ற புள்ளிகளில், ஏற்ற வீச்சுக் கோணங்களாகும்.

$$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ என்று காண்பி.}$$

25. ஓர் எறிபொருள், அது எறியப்பட்டு 't' விநாடிகள் கழித்து P என்ற புள்ளியை அடைகிறது. மீண்டும் 't' நேரம் கழித்து, வீச்சுப்புள்ளியின் வழியாக வளைவப்படும் கிடைதளத்திலுள்ள புள்ளியைச் சென்றடைகிறது. கிடைதளத்திற்கு மேலே P-ன் உயரம் $\frac{gt^2}{2}$ என்று திருபி.

26. 30° தூரத்தில் 20° உயரமுள்ள ஒரு மரத்தைத் தாண்டிக் கொண்டு செல்லும் ஓர் எறிபொருள் மரத்துக்கும் பின்னே $5'$ தூரத்தில் சமதளத்திலுள்ள புள்ளியைச் சென்றடைகிறது. எறிபொருளின் ஆரம்ப திசைவேகத்தையும் வீச்சுக் கோணத்தையும் கண்டுபிடிக்க.

27. 3° ஏற்றக் கோணத்தில் விநாடிக்கு 1000 அடிகை திசைவேகத்துடன் செலுத்தப்படும் ருண்டு அடையும் கிடைவீச்செல்வையைக் கண்டு கத்தமாகக் கண்டுபிடி.

எறிபொருள்கள்

28. 100 சென்டி தூரத்தைக் கிடைவீச்செய்யவேண்டிய அளவுபயன்பாட்டில் விசை குறைந்த ஆரம்ப வீச்சைத் திசைவேகத்தைக் காட்டுகிறது. பதிலுமே நேரத்தையும் காட்டுகிறது.

29. ஒரு துப்பாக்கியின் உச்ச வீச்செல்லை 16 அடிகள். ஆரம்பத் திசைவேகத்தைக் காட்டுகிறது. துப்பாக்கியிலிருந்து புறப்படும் குண்டு 4 அடிகள் கிடைதூரம் செல்லும்போது எவ்வளவு உயரத்திற்கு இருக்குமெனக் காட்டுகிறது.

30. கொடுக்கப்பட்ட வீச்சைத் திசைவேகத்துக்கு, 'R' என்பது உச்சக் கிடை வீச்செல்லைப்பெயர்வும், வீச்செல்லையிலிருந்து $\frac{R}{2}$ என்ற பக்கவாட்டில் குறையவேண்டிய கிடை, திசை தூரங்களைக் கவனமுடன் புள்ளியின் வழியாக எறிபொருள் செல்லுமெனக் காண்பி. ஆனால் இந்தக் வீச்சைக் கோணத்தின் இருக்கை [taught] 1 ஆகவே அல்லது 3 ஆகவேதான் இருக்கவேண்டுமெனவும் திருப்தி.

31. கிடை சமதளத்திலிருந்து 200 அடிகள் உயரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து விநாயக்கு 2000 அடிகள் திசைவேகத்துடன் கிடை திசையில் ஓர் எறிபொருள் செலுத்தப்படுகிறது. அது கிடைதளத்தை வட்டையுமேபோது வீச்சுப் புள்ளியிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்திலிருக்குமெனக் காட்டுகிறது.

32. 400 அடிகள் உயரத்திலுள்ள ஒரு மையப்புச்சியிலிருந்து 30° ஏற்றக் கோணத்தில் 768 அடிகள்/விநாயு திசைவேகத்துடன் செலுத்தப்படும் குண்டு தகரையை அடைவதுபோது அது மையப்புச்சியிலிருந்து 3200 சென்டி தூரத்திலிருக்குமெனக் காண்பி.

33. தகரையிலிருந்து 3° உயரத்திலிருந்து எறியப்படும் பந்து 35° தூரத்திலுள்ள 15' உயரச் சுவரைச் சந்தித்தே தாண்டிச் செல்லும். 24½' உயரத்திலிருந்து பூமியின் ஈர்ப்புச் சக்தியினால் விழும்போது, தகர் அடையும் திசைவேகத்தையிட, பந்தின் ஆரம்பத் திசைவேகம் குறைவாகவுண்டதன் திருப்தி. அப்படிப்பட்ட திசைவேகத்துடன் செலுத்தப்படும் பந்து தகரையை வட்டையுமேபோது சுவருக்கு எவ்வளவு பின்னே இருக்குமெனக் காட்டுகிறது.

34. பூமிக்கு 4 அடி 3 அங்குலங்கள் உயரத்திலிருந்து 40 அடிகள்/விநாயு திசை வேகத்துடன் செலுத்தப்படும் ஓர் எறிபொருள் 20° தூரத்திலுள்ள 16 அடி 3 அங்குலங்கள் உயரமுள்ள சுவருக்கு சற்று மேலே சென்று பூமியை அடைய எவ்வளவு நேரமாகும்?

35. எறிபொருளின் கிடைவீச்செல்லை R, பதிலுமே நேரம் T மிதவகம் $gT^2 = 2R \tan \alpha$ என்ற சமன்பாட்டைச் சரிசெய்யுமென திருப்தி.

உச்சக் கிடைவீச்செல்லை 100 மைல்கள் என்றும், பறக்கும் நேரம் 3 நிமிடங்கள் என்றும் கொண்டாய் (1) வீச்சுக் கோணம், (2) ஆரம் பத் திசைவேகம், (3) வீச்சுப் பாதையின் உயரம் கிடைவகையாகக் கண்டுபிடி.

36. 50 செனா தூரத்தில் 75 அடிகள் உயரத்திலுள்ள கவரைக் கிடை திசையில் தாண்டிச் செல்லும் எதிப்பொருளின் திசைவேகத்தைவும் அதன் திசையையும் கண்டுபிடி.

37. 100 அடிகள் உயரத்திலுள்ள ஒரு கோபுரத்திலிருந்து கிடை திசையில் செலுத்தப்படும் எதிப்பொருளின் வீச்சுப் பாதையின் குவியம் கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து வரையப்படும் கிடை சமதளத்தில் அமைப்பு மென்றால், எதிப்பொருளின் வீச்சுத் திசைவேகம் விநாடிக்கு 80 அடிகள் என்று திருபி.

38. 9 அடிகள் உயரத்திலிருந்து கிடைதிசையில் செலுத்தப்படும் எதிப்பொருள் 1000 அடிகள் தள்ளிப் பூமியை அடைகிறது என்றால், ஆரம்பத் திசைவேகம் $133\frac{1}{3}$ அடிகள்/விநாடி என்று காண்பி.

39. கிடைவீச்செல்லை, வீச்சுப் பாதையின் உயரத்திற்குச் சமமாக இருக்க வேண்டுமானால், எதிப்பொருளின் வீச்சுக் கோணம் 15° அல்லது 75° ஆக இருக்கவேண்டுமென திருபி.

40. $2\sqrt{ag}$ திசைவேகத்தடன் செலுத்தப்படும் எதிப்பொருள் 'a' சம உயரமுள்ள கிரண்டு கவுச்சுக்குச் சற்றே மேலே சென்றும் எதிப்பொருள் பாதையின் குவியம் '2a' என்றும் கவுச்சுக்குக்கிடையே பறக்கும் நேரம் $2\sqrt{\frac{a}{g}}$ என்றும் திருபி. [கவுச்சுக்குக்கிடையேயுள்ள தூரம் 2a என்று கொள்ள.]

41. வீச்சுப் பாதையிலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியின் திசைவேகம் 'U' என்றும், வீச்சுக் கோணம் 'θ' என்றும் கொண்டால், $\frac{U}{g \sin \theta}$ நேரம் கழித்து கிந்தத் திசைக்குச் செங்குத்தாக எதிப்பொருள் பறக்குமெனக் காண்பி.

42. தளமிலிருந்து செலுத்தப்படும் எதிப்பொருள், வீச்சுப் புள்ளியிலிருந்து 'a' தூரத்தில் 'h' உயரமுள்ள கவுருக்குச் சற்று மேலே செல்லும் வீச்சுப் பாதை, கவுருக்குச் செங்குத்தான நளத்தில் அமைந்தால், கிடைவீச்செல்லை R என்பது $\tan \alpha = \frac{Rh}{R-h}$ என்ற சமன் பாட்டிற்குக் கட்டுப்பட்டிருக்குமென திருபி. (α = ஆரம்ப வீச்சுக் கோணமெனக் கொள்ள.)

எறிபொருள்கள்

43. 'h' என்பது உச்ச வீச்சு உயரமென்றும் அப்போது கிடைவீச்செல்லை 'R' என்றும், கொடுக்கக்கூடிய ஆரம்பத் திசைவேகத்துடன் செலுத்தப்படும் எறிபொருள் அடையும் உச்ச வீச்செல்லை, $\frac{16h^2 + R^2}{8h}$ என்று காண்பி.

44. கிடைதிசைக்கு 'd' கோணத்துடன் 'V' திசைவேகத்துடன் செலுத்தப்படும் பந்து 'P' புள்ளியிலிருந்து புறப்பட்ட 't' விநாடிகள் கழித்து Q என்ற புள்ளியை அடைகிறது. P-லிருந்து Q-ன் கிடை, திசைதூரங்களைக் காட்டுக. PQ, கிடை திசையுடன் 'θ' கோணத்தை உண்டாக்கினால் பந்து Q-ல் இருக்கும்போது அதன் வீச்சுக்கோணம் கிடைதிசையுடன் $\tan^{-1} [2 \tan \theta - \tan \alpha]$ என்ற கோணத்தை உண்டாக்குமென நிரூபி.

45. வீச்சுப் பாதையிலுள்ள P, Q என்ற புள்ளிகளில் வீச்சுக் கோணம் முறையே 'α', 'β' ஆகும். PQ என்ற நேர்க்கோடு கிடை திசையுடன் 'γ' கோணமுண்டாக்கினால், $\tan \gamma = \frac{1}{2} (\tan \alpha + \tan \beta)$ எனக் காண்பி.

46. எறிபொருள் ஆரம்ப வீச்சுத்திசைக்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் போது, அது வீச்சுப்புள்ளியிலிருந்து $\frac{U^2}{2g \sin^2 \alpha}$ தூரத்திலுள்ள நென நிரூபி. அப்போது திசைவேகம் $U \cot \alpha$ எனவும் நிரூபி. (U, α என்பனவ ஆரம்பத் திசைவேகம், ஆரம்ப வீச்சுக்கோணம் எனக் கொள்க.)

47. 10,000 அடிகள் தூரத்திலுள்ள 100 அடி உயரமுள்ள கட்டடத்தின் உச்சியைத் தாக்க 1200 அடிகள்/விநாடி திசைவேகத்துடன் செலுத்தப்படும் குண்டு எந்தத் திசையில் வெடிக்கப்பட வேண்டுமெனக் காட்டுக.

48. 'h' உயரமுள்ள ஒரு குள்தின் ஏற்றக்கோணம் 'β' ஆகும். குள்தின் உச்சியைத் தாக்கவேண்டுமானால், ஆரம்பத் திசைவேகம் $g h \sqrt{1 + \cot^2 \beta}$ -க்குக் குறைவாக் கூடாதென நிரூபி.

49. 120' தூரத்தில் 50' உயரமுள்ள ஒரு கலவுக்குச் சற்றே மேலே செல்லும் எறிபொருளின் குறைந்த ஆரம்பத் திசைவேகம், தூசு 90 அடிகிலிருந்து விழும்போது ஏற்படும் திசைவேகத்துக்குச் சமமென நிரூபி. ஆரம்ப வீச்சுத்திசையையும் காட்டுக.

50. வீச்சுப் பாதையிலுள்ள இருபுள்ளிகளின் வீச்சுக்கோணங்கள் α, β என்றால் அந்த மீரண்டு புள்ளிகளுக்கிடையே எறிபொருள் பறக்கும்

நேரம் $\frac{V}{g} [\tan \alpha - \tan \beta]$ என திருப்தி. [V ஆரம்பத் திசைவேகத்தின் கிடைக்க வலு எனக் கொள்க.]

51. 30° ஏற்றக் கோணத்திலுள்ள சாய்தளத்தின் அடியிலிருந்து 60° வீச்சுக்கோணத்தில் 300 அடிகள்/விநாடி திசைவேகத்துடன் ஒரு துகள் விடப்படுகிறது. சாய்தளத்தின் மேல் வீச்செல்வையையும், பறக்கும் நேரத்தையும் காண்க.

52. கொடுக்கப்பட்ட ஆரம்பத் திசைவேகத்துடன் கிடை சமதளத்தில் உச்ச வீச்செல்வை 3000 மீட்டர்கள். 30° ஏற்றக்கோணமுள்ள சாய்தளத்தின்மேல் உச்ச வீச்செல்வையைக் காண்க.

53. 30° ஏற்றக்கோணமுள்ள சாய்தளத்தின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியை, 'U' திசைவேகத்துடன் செலுத்தப்படும் ஓர் எறிபொருள், செங்குத்துத் திசையில் தாக்குகிறது. சாய்தளத்தின்மேல் வீச்செல்வை $\frac{4U^2}{7g}$ எனக் காண்க.

54. ஒரு குன்று கிடைதிசைக்கு 30° கோணத்தில் சாய்ந்திருக்கிறது. குன்றின் ஒரு புள்ளியிலிருந்து, ஓர் எறிபொருள் மேலே எறிப்பப்படுகிறது. மத்தென்று கீழ்தேக்கி எறிப்பப்படுகிறது. மீண்டும் வீச்சுகளின் போதும் ஆரம்ப வீச்சுக்கோணம் 45° ஆகும். ஓர் எறிபொருளின் வீச்செல்வை மத்தின் வீச்செல்வையைப் போல் ஏறக் குறைவாக $3\frac{1}{2}$ மடங்கே திருப்தி.

55. கொடுக்கப்பட்ட சாய்தளத்தின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரே திசைவேகத்துடன் எறிப்பப்படும் இரண்டு துகள்களின் வீச்சுக் கோணங்களிடையேயுள்ள கோணம் $\frac{\pi}{2}$ என்றால், அந்த மீண்டும் எறிபொருள் கள் உண்டாகும் வீச்செல்வையிடையேயுள்ள தூரம் ஒரு மாநிலியைக் காண்க.

56. வீச்சுப் புள்ளியின் வரையாகச் செல்லும் சாய்தளத்தின்மேல் எறிபொருள் உண்டாகும் உச்ச வீச்செல்வை, அந்த நேரத்தில் ஒரு பொருள் தடைபிளந்த விழும தூரத்துக்குச் சமமென திருப்தி.

57. வீச்சுப் புள்ளியின் வரையாகச் செல்லும் தளம் ' β ' கோணத்தில் கிடை சமதளத்துடன் சாய்ந்திருக்கிறது. வீச்சுப் புள்ளியிலிருந்து 'U' திசைவேகத்துடன் செலுத்தப்படும் துகள் சாய்தளத்தைச் செங்குத்துவாகச் சந்திக்கிறது.

(1) சந்திக்கும் புள்ளி வீச்சுப் புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் கிடை
சமதளத்திலிருந்து $\frac{2U^2 \sin^2 \beta}{g(1+3 \sin^2 \beta)}$ உயரத்திலிருக்கும்.

$$(2) \text{ மிதந்தான நேரம் } \frac{2U}{g\sqrt{1+3 \sin^2 \beta}}$$

$$(3) \text{ சமதளத்தின் வீச்செல்லை } = \frac{2U^2 \sin \beta}{g(1+3 \sin^2 \beta)} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

58. ஒரேநிலை சமதளத்தில், சம திசைவேகத்துடன், ஒரே புள்ளியி
லிருந்து செலுத்தப்படும் பல துகள்களின் பரவலைப் பாதைகளின்
குறியீடுகள் ஒரு வட்டத்தின் மேல் அமைந்துள்ள திருவி.

59. ஒரேநிலை சமதளத்தில், சம திசைவேகத்துடன், ஒரே புள்ளியி
லிருந்து செலுத்தப்படும் துகள்கள் எந்த ஒரு நேரத்திலும் ஒரு வட்டத்
தின்மேல் அமைந்துள்ளனக் காண்பி. ஒன்றிலிருந்து பறக்கும்பொழு
மற்றத் துகளின் திசை மாறாமலிருக்கிறதெனவும் காண்பி.

60. ஒரேநிலை சமதளத்தில், 'V' திசைவேகத்துடன், மிகு துகள்கள்
' θ_1 ' ' θ_2 ' வீச்சுக் கோணங்களுடன் செலுத்தப்படுகின்றன.

$\frac{V}{g} \cot \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ நேரம் கழித்து அந்தத் துகள்களின் திசைவேகங்கள்
கிடைப்பாக விருக்குமென திருவி. அவைகளைச் சேர்க்கும் நேரகோடு
எத்திரத்திலும், நிலைதிசையுடன் $\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ என்ற கோணத்தை உள்
டரக்குமெனக் காண்பி.

6. கணத்தாக்கு விசைகள் (Impulsive forces)

6.1. விசையின் தாக்களவு: P எனும் ஒரு சீரானவிசை (uniform force) ஒரு பொருளின் மீத 't' அளவு காலம் செயல்படின், அதன் தாக்களவு (Impulse) Pt ஆகும்.

(i) விசை திசையானது, அதன் அளவு காலத்தில் சார்பற்றதும் 't' நேரத்தில் அதன் அளவு P ஆகும். அந்நேரத்திலிருந்து 't' எனும் குறுகிய துண்டான அளவில் அது சீரான விசை எனக் கொள்ளலாம். ஆகவே அதன் தாக்களவு $P \cdot t$ ஆகும். t_1 என்ற

நேரத்திலிருந்து t_2 எனும் நேரம் வரையுள்ள, தாக்களவு $\int_{t_1}^{t_2} P dt$

எனும் துண்டொன்றாகும்.

(ii) விசையின் திசையும் அளவும், மாறக்கூடியதாக 't'-ன் சார்பற்றதும் t நேரத்தில் விசையை P எனும் வேக்டராக குறிப்போம். அப்போது 't₁', என்ற நேரத்திலிருந்து t_2 எனும் நேரம் வரை, விசை

தாக்களவு $\int_{t_1}^{t_2} P dt$ எனும் துண்டொன்றாகும்.

[குறிப்பு: கடைசியில் கூறியதே தாக்களவின் மிகவும் பொதுவான வரையறை (General definition) ஆகும்.]

தேற்றம்

ஒரு பொருளின்மீத ஒரு விசை, ஒரு கால அளவிற்குத் தொடர்ந்து செயல்பட அதில் ஏற்படும் உந்தமாற்றம், அதே காலத்தில் விசையின் தாக்களவிற்குச் சமமானதும்.

நிறுபணம்: பொருளின் திணிவு m . 't' என்ற நேரத்திற், விசையின் மதிப்பு P . அந்நேரத்திற் அதன் வேகம் \bar{v} .

அப்போது திசுட்டனின் கியக்க விதிப்படி,

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = P$$

[உத்த மாலுதல் வீதம் = விசை என்பது விதி]

$$\therefore \int_{t_1-\bar{v}}^{t_2-\bar{v}} d(m\bar{v}) = \int_{t_1}^{t_2} P dt$$

t_1 நேரத்திற் வேகம் \bar{v}_1 ஆகவும் t_2 நேரத்திற் \bar{v}_2 ஆகவுமானால்

$$\int_{\bar{v}_1}^{\bar{v}_2} d(m\bar{v}) = \int_{t_1}^{t_2} P dt$$

$$\therefore (m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1) = \int_{t_1}^{t_2} P dt$$

\therefore உத்தமாலுதல் = விசையின் தாக்களவு

[குறிப்பு: ஒரு சிலர், உத்தமாலுதலைத் தாக்களவின் விசைவரைக்

கொண்டு, $\int_{t_1}^{t_2} P dt$ என்பது விசையின் தாக்களவு எனும் முடிவிற்கு வருவதும் உண்டு.]

6-2. கணத்தாக்கு விசை: மிகப் பெரிய விசை மிகக் குறுகிய காலத்திற்கு ஒரு பொருளின்மேல் செயல்பட, அத்தகைய விசை கணத் தாக்கு விசை (Impulsive force) எனப்படும். > கொள்கையளவில், விசை அலகிலை எனப்படும். மிகப் பெரியதாகவும், செயல்படும் காலம் மிக மிக மூன்றாண்டவாகவும் ஆனால், தாக்களவு (அதாவது வீரண்டின் பெருக்கற்பலன்) கணிசமாகவும் இருக்கவேண்டும். தடைமுறையில் இது சாதாரணமாக, ஒரு பந்தங்களுடன் மோதுதல், எதிரியால் ஓர் ஆணியை அடித்தல், கீழே விழுந்தகொண்டிருக்கும் பந்தை உதைத்தல், இரு கோலிக் மோதல் முதலியனவாம். இவ்வெல்லாம் திடீரென உத்தமாலுதல் ஏற்படுகின்றது. 10⁷ அளவுள்ள விசை (அதாவது கோடி

அளவுகள்), $\frac{1}{10^7}$ வினாடி செயல்பட ஏற்படும் உத்தமாவது $10^7 \times \frac{1}{10^7} = 1$ அளவாகும். 1 உட்கு ஒப்புநோக்குமிடத்து 10^7 மிகப் பெரிய எண்ணும் $\frac{1}{10^7}$ மிகச் சிறிய எண்ணாகும். ஆனால், உத்தமாவது அளவிடத் தகுதிய (finite) எண்ணாகும் என்பதைக் காண்கிறோம்.

6.3 கணத்தாக்கு விசையும் தொடர்ந்து செயல்படும் விசையும்: ஒரு பத்து மெலிடுத்து, புவிவீர்ப்புவிசை தொடர்ந்து செயல்படுவதால் கீழே விழுகிறது. தொடக்கு தொடர் அந்நிலை மாறுகிறது. அதன் உத்தமம் மாறுகிறது. இவ்வாறு தொடர்ந்து செயல்படும் விசையை, உத்தமாவது விதத்தாகக் கூறுகிறோம்.

கீழேவிலும் பந்தை ஒரு மட்டை தாக்கினால், ஒரு மிகப் பெரிய விசை ஒரு கணநேரத்திற்குப் பந்தைத் தாக்குகிறது. பந்தின் அந்த நிலைமையே நீட்டின உத்தமாவது ஏற்படுகிறது. ஆகவே கணத் தாக்கு விசை செயல்படுகிறபோது (i) பொருளின் நிலையாறுவதில்லை (ii) பொருளின் ஏற்படும் உத்தமாவது கணத்தாக்கு விசையைக் கூறுவனவடிவாகிறது. (iii) உத்தமாவது ஏற்படும் காலம் Δt ஆகவும், அந்த நேரத்தில் தொடர்ந்து செயல்படும் விசை F ஆகவு மாகும், இதனால் ஏற்படும் உத்தமாவது $F \cdot \Delta t$. இது Δt , மிகக்குறு கும்போது, கணத்தாக்கு விசையால் ஏற்படும் உத்தமாவதுடன் ஒப்புநோக்குமிடத்து, புறக்கணிக்கத்தக்க அளவுக்கு துண்ணியதாகும். இதனால் நாம் தேறுவது,

(i) கணத்தாக்கு விசையைக் கணக்கில் எடுக்கும்போது அத்துடன் செயல்படும் மற்றத் தொடர்ந்து செயல்படும் விசைகளைப் புறக்கணிக்கலாம் என்பதாம்.

குறிப்பு 1: கணத்தாக்கு விசையின் அளவு J , அது தாக்குந் பொருளின் வேகம் \bar{u} ; தாக்கின உடனே வேகம் \bar{v} ; திண்மை m என்றால்

$$J = m\bar{v} - m\bar{u} \text{ என்பது}$$

கணத்தாக்கு விசைக்குள்ள சமன்பாடாகும்.

குறிப்பு 2: கணத்தாக்கு விசையின்மீத நிலையின் உத்த மாவது இல்லை. திணிவு நிலையானால் வேகமாவது இல்லை. உதாரணமாக ஒரு பந்தை ஒரு கவரை நோக்கி எறிந்தால், கவரை அடையும்வரை அதற்குள்ள வேகம் கிடைவேகம் (Horizontal velocity), நிலைவேகம் (Vertical velocity) என பிரிந்துக் கூடுதலாகும். கவரை தாக்கும்போது கணத்தாக்கு விசையின்

திசை கிடைப்பாதாது, நிலையாகத்தான் மாறுதல் ஏதும் ஏற்படாது. அவர் கிடைப்பிலும், நிலையாகத்தான் புவி எதிர்ப்புவிசையால் எவ்வளவு வேகமாறுதல் ஏற்படுமோ அதையெல்லாம் தாக்குமுள்ளனும் பின்புறம் ஏற்படும்.

6.4 உந்தக் காப்புக்கொள்கை (Conservation of Momentum): ஒரு திசையில் கணத்தாக்கு விசை கிடைப்பாயின், உந்த மாறுதலும் ஏற்படாது எனக் காணப்படும். இது பத்துகள் ஒன்றுடன் ஒன்று மோதிக்கொள்ளும்போது, கணத்தாக்குவிசைகள் செயல்படுகின்றன. தியூட்டளின் மூன்றுவது கிபக்களிடப்படி, இது பத்துகளின் மேலும் செயல்படும் கணத்தாக்குவிசைகள் அளவில் ஒன்றாகக் கொண்டு சமம், ஆனால் திசையில் எதிர். அதனால் ஒன்றில் ஏற்படும் உந்த மாறுதல், மற்றதில் ஏற்படும் உந்த மாறுதலுக்கு அளவில் சமம் ஆனால் திசையில் எதிர். ஆகவே, மொத்த உந்த மாறுதல் பூஜியம். தாக்குக்கு முன்னாலுள்ள உந்தமே பின்னரும் மாறாது உள்ளது. இரண்டு பொருள்கள் ஒன்றுடன் ஒன்று மோதிக்கொள்ளும்போது அவற்றின் மொத்த உந்த மாறுதல் மாறாது.

[குறிப்பு: இரண்டு பொருள்களுக்குக் கூறியது கிரைவுக்கு மேற்பட்ட பொருள்களுக்குப் பொருத்தம். அவைகளின் உந்தங்களின் வெக்டர் கூடுதல் மாறாது திரும்பும். பொருள்களை ஒரே தொகுதியாகக் கொள்ள, மொத்த உள்சூறு (Internal) கணத்தாக்குவிசை எனக் கொள்ளலாம். பீரங்கியில் குண்டு வெடிக்கும்போதும், ஒரு குண்டு திரெளன் பல துண்டுகளாகச் சிதறும்போதும் உள் விசைகளை உள்சூறு கணத்தாக்கு விசைகள் எனக் கொள்ளலாம். தொகுதியின் வெக்டர் உந்தமாறுதல் முள்ளனும் பின்புறம் ஒன்றே.]

6.5. பீரங்கியும் குண்டும்: ஒரு பீரங்கியில் மருத்து அடைத்துக் குண்டும் உள்ளது. மருத்து திரெளன் வெடிக்க, அதனால் வெளியாகும் கிரைவான ஆற்றலின் ஒரு பாகம் ஒலியாகவும் வெப்ப ஆற்றலாகவும் மாறுகிறது. பெரும்பாகம், பொறியாற்றலாக (Mechanical energy) மாறி, குண்டிலும், பீரங்கியிலும் உந்த மாறுதல் ஏற்படுத்துகிறது. பீரங்கி, குண்டு கிரைவையும் ஒரே தொகுதியாகக் கொள்ள, மொத்த உந்த மாறுதல் முள்ளனும் பின்புறம் ஒன்றே.

பீரங்கியின் திணிவு M

குண்டின் திணிவு m .

மருத்து வெடிப்பதற்குமுன் கிரைவுகள் வேகம் = 0

வெடித்தவுடன் பீரங்கியின் வேகம் = V ஆகுக.

குண்டின் வேகம் = u ஆகுக.

உத்தக்காப்புக் கொள்ளையால்

$$M\vec{U} + m\vec{u} = 0$$

$$\therefore m\vec{u} = -M\vec{U}$$

ஆகவே குண்டு முன்னே பாய்ந்தால், பிரங்கி பின்னடைகிறது.

$$|\vec{u}| = u \text{ எனவும் } |\vec{U}| = U \text{ எனவுமானால்}$$

$$mu = MU \text{ (அளவில் சமம்.)}$$

ஆற்றலும் வேகமும்: மருத்து வெடிப்பதால் ஏற்படும் பொறி யாற்றல் E ஆகுக. இந்த ஆற்றல் கியங்கு ஆற்றலாக (Kinetic Energy) மாறுகிறது.

$$\therefore E = \frac{1}{2} mu^2 + \frac{1}{2} MU^2$$

$$= \frac{1}{2} [mu^2 + MU^2] = \frac{1}{2} \left[mu^2 + \frac{m^2 u^2}{M} \right]$$

$$\therefore E = \frac{m(m+M)u^2}{2M}$$

$$\therefore u^2 = \frac{2ME}{m(m+M)} = \frac{\frac{2E}{m}}{1 + \frac{m}{M}}$$

M பெரிதாக ஆக u அதிகமாகிறது.

கணக்கு 1: ஒரு வழுவுழிப்பான தகரவீது ஒரு வண்டியில் கிடைசோட்டிற்கு α° சாய்வில் ஒரு பிரங்கி பொருத்தப்பட்டுள்ளது. பிரங்கி வெடிக்கும்போது அதிலிருந்து கிளம்பும் குண்டு கிடை சோட்டிற்கு θ° உயரத்தில் பாய்கிறது. பிரங்கியும் வண்டியும் சேர்ந்து குண்டடைப்போல் n மடங்கு திணிவாகிறது,

$$\tan \theta = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \tan \alpha.$$

என நிறுவுக.

குண்டு கிளம்பும்போது, பிரங்கி வண்டியுடன் பின்னோக்கி நகரும். அல்லது பிரங்கி பின்னோக்கிச் செல்லும் வேகம் u எனப்போம். பிரங்கியைச் சார்ந்து குண்டின் வேகம் v எனப்போம். இது பிரங்கியின் குழியின் திசையில், அதாவது கிடைதளத்திற்கு α உயரச் சாய்வில் உள்ளது. இதன் கிடைப்பிடுவு $v \cos \alpha$ (முன்னோக்கிய திசையில்). பிரங்கியின் வேகம் u (பின்னோக்கி)

$$\therefore \text{குண்டின் உணர்மகக் கிடைவேகம்} = v \cos \alpha - u$$

$$\text{குண்டின் வேகத்தின் நியைப் பிடுவு} = v \sin \alpha$$

∴ குண்டின் வேகத்தின் உயரத் சம்பவு θ எனில்,

$$\tan \theta = \frac{\text{வேகத்தின் திசைப்பதிவு}}{\text{வேகத்தின் கிடைப்பதிவு}}$$

$$\tan \theta = \frac{v \sin \alpha}{v \cos \alpha - u} \quad \dots\dots(1)$$

உத்தக் காப்புக் கொள்கையடி

$$nu = (v \cos \alpha - u)$$

$$(1+n)u = v \cos \alpha$$

$$\therefore v = (1+n) \frac{u}{\cos \alpha} \quad \dots\dots(2)$$

சமன்பாடுகள் (1) & (2)-இல் இருத்து

$$\tan \theta = \frac{(1+n) u \tan \alpha}{(1+n) u - u}$$

$$= \frac{(1+n) u \tan \alpha}{nu}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \tan \alpha$$

6-6. தூவால் இணைக்கப்பட்ட இரு பொருள்கள் :

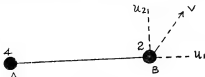


படம் 66.

A, B, எனும் இரு பொருள்கள், தீளம் மாத நிலை ஒரு தூவால் இணைக்கப்பட்டு, தூல் மறுக்கமாக இருக்கும்படி அமைபட்டும். B எனும் பொருளை ஒரு கணத்தாக்கு விசைதாக்கினால் (AB திசையிலே, அல்லது குத்தாகவோ அல்லாமல்), B எவ்வாறு நகரும் எனக் கூற நிலைத்து. ஏனெனில் தூவிலும் இழுக்கணத்தாக்கு விசை தோன்றும். ஆனால் A, B இரண்டையும் ஒரு தொகுதியாகக் கொண்டால் அவ்விசையின் மொத்த உத்தமாதாதல் கணத்தாக்கு விசைக்கு அளவிலும் திசையிலும் சமமாகும் எனவும், நகரு விசைக்குக் குத்தத் திசையில் உத்தமாதாதல் ஏதும் இல்லை எனவும் அறிவேம். அன்றியும் B நகரும் திசையில் A-யின் உடல் நகரவேண்டும்.

கனகிதங்கள்

A, B மிகு பொருள்களின் திணிவு முறையே 4 கிலோ; 2 கிலோ ஆகும். அவை ஒர் கீழ்ப்படமுடியான தூரமாக நினைக்கப்பட்டு தூரம் கிழக்கமான திசையில் ஒரு வழவழப்பான சமதளத்தில் உடர்மான. AB கிழக்கு நோக்கியுள்ளது. B கட்டப்பொதிருத்ததால் வடகிழக்காக 7 மீ. வேகத்துடன் நகரும்படி ஒரு விசை அதைத் தாக்குகிறது. B என்ன வேகத்துடன் நகரத் தொடங்குகிறது?



படம் 69.

தாக்கு விசையின் அளவு $= 7 \times 2 = 14$. அதன் திசை வடகிழக்குத் தாக்குதலுக்கு மின்னல், உடனே, கிழக்காக B-ன் வேகம் u_1 வடக்காக u_2 ஆகும்.

∴ A-ன் வேகமும் கிழக்காக u_1 ; (வடக்காக பூஜியம்)

கிழக்காக A, B கிரன்டிஸ் உத்தமாதரம் $= 4u_1 + 2u_1 = 6u_1$

$$6u_1 = 14 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore u_1 = \frac{7}{3\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{6}$$

$$\text{வடக்காக மொத்த உத்தமாதரம்} = 2u_2 = \frac{14}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore u_2 = \frac{14}{2\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

∴ B-ன் வேகம் V ஆகும்

$$V^2 = u_1^2 + u_2^2 = \left(\frac{7\sqrt{2}}{6}\right)^2 + \left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2 \left[\frac{1}{9} + 1\right]$$

$$V = \frac{7\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{3} = \frac{7\sqrt{20}}{6} = \frac{7\sqrt{5}}{3}$$

$$\begin{aligned}\text{திசை} &= கி. \tan^{-1} \left(\frac{u_2}{u_1} \right) \text{ வ.} \\ &= கி. \tan^{-1} \left(\frac{7\sqrt{3}}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{6} \right) \text{ வ.} \\ &= கி. \tan^{-1} 3 \text{ வ.} = கி. 71^\circ 34' \text{ வ.}\end{aligned}$$

கணக்கு: 'I' அமகு திளமுள்ள ஒரு தூலாக் கிணைக்கப்பட்ட சம திவரிவுள்ள இரு பொருள்கள், ஒரு சமநளத்தில் நெருங்கி உள்ளன. கிவற்றுள் ஒன்றை $\sqrt{10}g$ அளவு வேகத்துடன் நேர் மேலே எறித்தால், அது மீண்டும் தளத்தில் $2\sqrt{g}$ வேகத்துடன் விழும் எனக் காட்டு.



[கிவ்ருள்ள கிவக்கள்ள ஆராயவேண்டும்.

(i) முதலில் A நேர் மேலே செல்கிறது. அதன் மேல் புவிவீர்ப்பு விசை தொடர்ந்து செயல்படுகிறது.

(ii) B-விருத்து A-ன் உயரம் I ஆகும்போது தூல் திடீரென கிழுகிறது. அப்போது A, B கிரண்டின் மேலும் கணததாக்கு கிழுகினை செயல்படுகிறது.

(iii) A-யும் B-யும் ஒன்றுக மேலே செல்ல அளவு பேரில் புவிவீர்ப்பு விசை செயல்படுகிறது.

(iv) அளவு வீறங்கும்போது, B சமநளத்தில் விழுத் தளத்தின் கணததாக்கு விசை தாக்குகிறது.

(v) A மட்டும் கீழே விழுகிறது. தூல் தளர்வதால் புவிவீர்ப்பு விசை மட்டும் செயல்படுகிறது. A-ன் மேல் கணததாக்கு விசை கிவலை.

கிவ்ரு (i) (iii), (v)-ல் தொடர்ந்து செயல்படும் விசைகளும் (ii), (iv)-ம் கணததாக்கு விசைகளும் செயல்படுகின்றன. கிவற்றை ஒவ்வொன்றுகக் கணக்கிடுவோம்.]

(i) $\sqrt{10gl}$ என்ற விசையுடன் A புறப்பட்டு, l உயரத்தில் வரும் போது அதன் வேகம் v ; " $v = u^2 - 2ga$ " என்ற சூத்திரத்தின்படி

$$v^2 = 10gl - 2gl = 8gl$$

$$v = \sqrt{8gl}$$

(ii) கணத்தாக்கு விசை A , B நிரண்டிலும் செயற்படுவதால் உத்தரக் காப்புக் கொடுக்கப்படாது.

$$\sqrt{8gl} = 2w \quad [\text{ம என்பது } A, B \text{ நிரண்டின் பொது வேகம். நிரண் டிற்கும் வேகம் ஒன்றே.}]$$

$$\therefore \text{தாக்குதலுக்குப் பின்னர் } A, B \text{ நிரண்டின் வேகம் } w = \sqrt{2gl}$$

(iii) A , B நிரண்டின் மூடுக்கமும் கீழ்தோக்கி g ஆனதால் AB -ன் தூரம் l மாறாதபடி மேல்சென்று மறுபடியும் புறப்பட்ட நிலைக்கே வருகிறது.

(சமதளத்திலிருந்து) புறப்படும் வேகம் = அதற்குத் திரும்பும் வேகம் ஆதலால் B தளத்தை விடவும்போது அதன் வேகம் $= \sqrt{2gl}$.

$$B\text{-க்கு 'l' உயரத்தில் } A \text{ வரும்போது அதன் வேகம்} = \sqrt{2gl}.$$

(iv) B தளத்தில் திடீரெனத் தாக்குவதால் அதன் வேகம் மறைகிறது. தூரம் தளத்து விடுவதால் AB இத்தத் தாக்குவிசை ஒன்றும் செய்வதில்லை.

(v) A விட்போது $\sqrt{2gl}$ வேகத்துடன் l உயரத்திலிருந்து புறப்பட்டுக் கீழே விழுகிறது.

$$\therefore 'v^2 = u^2 + 2ga' \text{ என்ற சூத்திரத்தால்}$$

$$v^2 = 2gl + 2gl \quad \therefore v = 2\sqrt{gl}$$

$$\therefore A \text{ தளத்தில் விழும் வேகம்} = 2\sqrt{gl}$$

கணக்கு : 17 பவுன்டு, 15 பவுன்டு திணிவுள்ள மிரு துகள்கள் ஒர் மிருபடா தூவால் பினைக்கப்பட்டுள்ளன. தூக் உரையில்லாத சிறு கப்பெழிச் செல்ல, துகள்கள் கப்பெக்கு மிருபுறமும் தொக்கு கின்றன. அவை 16 செ.மீ.யிதாடி வேகத்துடன் மிவக்குட்போது, பெரிய துகள் திறத்தப்பட்டு உடனே விடப்படுகிறது. $\frac{1}{2}$ வினாடிக்குள் தளத்த தூக் மிருகுமென திழவுக. (M. U. April, 1965)

மிறுவின உடனே அவை எங்கெங்கே வேகத்துடன் மிவக்கு கின்றன?

செயல் முறை : திசுத்தி விட்டவுடன், 17 பவு., 0 வேகத்திலிருந்து புறப்பட்டுக் கீழே விழுகிறது. 15 பவு., 16 அடி வேகத்தில் மேலே தள்ளிச் செல்கிறது.

மறுபடியும் தூர் மிதக்கும் நேரத்தில் 17 பவு., எத்தனை தூரம் கீழே விழுந்ததோ அதேநேர தூரம் 15 பவு. மேலே சென்றிருக்க வேண்டும்.

அந்தக் காலம் 't' விநாடி ஆகும்.

$$17 \text{ பவு. கீழே விழும் தூரம்} = 16t^2 \quad [s = \frac{1}{2}gt^2 \text{ எனும் சூத்திரம்}]$$

$$15 \text{ பவு. மேலே போகும் தூரம்} = 16t - 16t^2 \quad [s = ut - \frac{1}{2}gt^2 \text{ எனும் சூத்திரம்}]$$

$$\therefore 16t^2 = 16t - 16t^2$$

$$\therefore 32t^2 = 16t$$

$$\therefore 32t = 16$$

$$\therefore t = \frac{1}{2}$$

\therefore மிதக்கும் $\frac{1}{2}$ விநாடியில் தூர் மறுபடியும் மிதக்கும்.

[குறிப்பு : $\frac{1}{2}$ விநாடியில் 17 பவு. விழும் தூரம் 1 அடி ; 15 பவு. மேலே போகும் தூரம் $= 4 - 1 = 3$ அடி. தூர் 2 அடி நளர்த்துள்ளது. ஆனால் $\frac{1}{2}$ விநாடியில் 16 பவு. 4 அடி விழுகிறது. சிதியது 4 அடி தூர் மேலே போயுள்ளது. ஆகவே, தூர் பழைய மிதக்கதிறைக்கு வந்துள்ளது.]

(ii) மிதக்கும்போது

பெரிய துகளின் வேகம்

$$\begin{aligned} &= 32t = 32 \times \frac{1}{2} \\ &= 16 \text{ அடி/விநாடி} \\ &\text{கீழ்நோக்கி.} \end{aligned}$$

சிறிய துகளின் வேகம்

$$\begin{aligned} &= 16 - 32t \\ &= 16 - 32 \times \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

மிதத்தாக்கு விசை J ஆகும். பொது விசை கீழ்நோக்கி v ஆகும்.

\therefore பெரிய துகளுக்கு J மேல்நோக்கி ஆவதால்

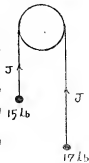
$$-J = +17v - 17 \times 16$$

சிறிய துகளுக்கும் J மேல்நோக்கி ஆவதால்

$$J = 15v$$

$$\therefore 0 = 32v - 17 \times 16$$

$$1392 = 13$$



படம் 71.

$$\therefore v = \frac{17 \times 16}{32} = 8\frac{1}{2} \text{ அடி/வினாடி.}$$

$$v = 8.5 \text{ அடி/வினாடி.}$$

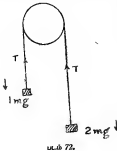
மாத்ர மூலத

[குறிப்பு: கிரண்டிற்கும் உடனாறு வினையாதலால் கிரண்டின் பொருண்மைய வேகம் மாத்ரபடாது.

$$\therefore \frac{17v + 15v}{32} = \frac{17 \times 16 + 15 \times 0}{32}$$

$$\therefore v = \frac{17 \times 16}{32} = 8\frac{1}{2} \text{ அடி/வினாடி.}]$$

கணக்கு: கிர பொருள்களின் திணிவு முறையே ௩, 2௩; கிடை ஒரு கப்பலிற் செல்லும் தூண்க் கிரண்டைக் கப்பலிற் கிடுபுறமும் தொங்குகின்றன. அவை கியங்கும்போது அவற்றின் பொது முடுக்கம் என்ன? கிவற்றன் 2௩ திணிவுள்ள பொருள் 3 வினாடி நேரம் வழித்துத் தரையைத் தாக்கி கிடுத்துவிட்டாக், கிதற்குப்பிறகு எப்போது தூக் மறுபடியும் கிடுக்கலாகும். அத்தப் பொருள் தரையி் கிடுத்து எவ்வளவு உயரம் செல்லும்?



கிரண்டின் பொது முடுக்கம் f ஆகும்.

தூவின் கிழுவிலை T ஆகும்

$$\therefore 2mg - T = 2mf$$

$$T - mg = mf$$

$$\therefore mg = 3mf$$

$$\therefore f = \frac{g}{3}$$

$$\therefore \text{பொது முடுக்கம்} = \frac{g}{3}$$

3 வினாடி நேரத்திற் கிரண்டின்

$$\text{பொது வேகம் } v = \frac{g}{3} \times 3 = g.$$

[$v = u + at$ எனும் சூத்திரப்படி]

(ii) \therefore தாக்கிய உடனே, தூம் நகர்த்துயிடுவதால் m எனும் பொருள்மேல் தாக்குவிசை நிகழும். அது கிப்போது புவிவீர்ப்பு விசையால் செயல்பட்டு மேலே, g எனும் வேகத்துடன் புறப்பட்டுச் செல்கிறது. புவிவீர்ப்பு விசை எதிர்நோக்கம் 'g' ஏற்படுத்துவதால், வேகம் குறைந்து மறுபடியும் புறப்பட்ட கிடைத்திகே $2 \cdot \frac{g}{g}$ காலத்தில் அதாவது 2 வினாடி காலத்தில் கீழ்நோக்கி g எனும் வேகத்துடன் வருகிறது.

(iii) தூம் திடீரென நிறுவுவதால் மிரண்டின்மேலும் கணத்தாக்கு விசையாக செயல்படுகிறது. பொதுவேகம் V ஆனால்

$$2mV + mV = m \cdot g$$

$$V = \frac{g}{3}$$

(iv) கணத்தாக்கு விசைக்குப்பிறகு, மிரண்டின் பொதுநுடுக்கம் $\frac{g}{3}$, மிதக்கு எதிர்த்திசையாகப் புறப்படும் வேகம் $\frac{g}{3}$. \therefore 1 வினாடி வரை 2m பொருள் மேல் நோக்கி நகருகிறது.

அது சென்ற உயரம் = $\frac{u^2}{2g}$ எனும் சூத்திரப்படி

$$\frac{g^2 \times 3}{9 \cdot g} = \frac{g}{3}$$

பயிற்சி

1. 3 கிலோ, திணிவுள்ள ஒரு பொருள், வினாடிக்கு 35 செ.மீ வேகத்துடன் 2 கிலோ பொருளை, அது வினாடிக்கு 5 செ.மீ. வேகத்தில் நகர்த்துகொண்டிருக்கும்போது தாக்கி, அதனுடன் ஒன்றுகிறது. தாக்கத்துக்குப் பிறகுள்ள வேகம் என்ன?

2. 30 கிராம் திணிவுள்ள ஒரு குண்டு 1000 செ.மீ. கிடை வேகத்தில் நியங்கும்போது 2 கிலோ எடையுள்ள ஒரு மரக்கட்டையின் தாக்கி உடன்படுகிறது. மரக்கட்டை வலுவழிபாண கிடைதளத்தில் நிகுத்தால், கட்டையின் குண்டும் என்ன வேகத்துடன் நியங்கத் தொடங்குகிறது?

3. 50 டன் திணிவுள்ள ஒரு பிரேம்பிளின்னு 200 பவுண்டு திணிவுள்ள குண்டு வினாடிக்கு 1600 அடி வேகத்தில் வெலியே பாய்ந்த தால் என்ன வேகத்துடன் பிரேம்பி பிண்ணடைய முயலும்?

4. ஒரு குண்டின் திணிவு m ; வினாடிக்கு V வேகத்தில் M திணிவு உள்ள கட்டையைக் கிடைப்பாகத் தாக்கி அதில் உடனே பதிகிறது. கட்டை லுழவுழப்பான கிடைநிலையில் இருந்தால், மொத்த இயங்கு ஆற்றல் கிழப்பு $\frac{MmV^2}{2(M+m)}$ எனக் காண்க.

5. மேற்கணக்கில் மீண்டும் முன்னர் போல ஒரு குண்டு தாக்கினால், மீண்டும் ஏற்படும் இயங்கு ஆற்றல் கிழப்பு $\frac{M^2mv^2}{2(M+2m)(M+m)}$ என நிதவுக.

6. கிரண்டு பொருள்கள் A , B -ன் திணிவு முறையே m_1 , m_2 ($m_1 > m_2$) ஆகும். கிடைவிரிவானும் விழுபடாத தூரம் கிணக்கப் பட்டு, ஒரு கப்பியின் இருபுறமாகத் தொங்குகின்றன. A என்ற பொருள் 'அ' தூரம் கிழங்கியவுடன் தரை தட்டுகிறது. அது மீண்டும் என்ன வேகத்தோடு எவ்வளவு நேரம் சென்றபின்னர் மேல்நோக்கி எழும்?

$$\left[\text{விடை : வேகம்} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{2ga(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}}; \text{நேரம்} = 2\sqrt{\frac{2a(m_1 - m_2)}{g(m_1 + m_2)}} \right]$$

7. மேற்கூறிய கணக்கில் A -ன் திணிவு $3M$; B -ன் திணிவு M . A தரைவிடும், B மேலேயும் ஆக இயங்காதுள்ளன. M திணிவுள்ள C எனும் மூன்றாவது பொருள் 'க' தூரம் நேர்க்குறிய விழுந்து B -ஐத் தாக்கி அதனுடன் ஒன்றிற்று இயக்கம் ஏற்பட்டு A எனும் பொருள் தரைமட்டத்திலிருந்து $\frac{h}{5}$ தூரம் உயர எழும் என நிதவுக.

8. m_1 , m_2 எனும் திணிவுகளை உடைய இரு துகள்கள் இழுபடாத தூரம் கிணக்கப்பட்டு, ஒரு கப்பியின் இருபுறமும் தொங்குகின்றன. m_1 தரைவிடும் m_2 அந்தரத்திலும் சமநிலையில் உள்ளன. m_2 எனும் துகளை நேர் மேலே 'க' தூரம் தாக்கி உடனே கிழங்கியப்படி விட்டால், துகள் 'க', $\frac{m_2^2 h}{m_1^2 - m_2^2}$ தூரம் மேலே எழும் என நிதவுக. (கிங்கு $m_1 > m_2$).

7. மீள் இயல்புடைய பொருள்கள்

7-1. மீள் இயல்புடைய பொருள்களின் மோதல்

நடைமுறையில் இரு குண்டுகள் மோதிக்கொண்டால், அவை வீரண்டும் ஒன்றுடன் ஒன்று சேர்த்திருக்கும் சுவர்த்தை, அது மிக துண்டியலாதவிலும், இரு கூறுகள் பிரிக்கலாம். மூத்த கூறில் அவை அழுங்குகின்றன. தாக்குதல் விடுபடுகிறபோது, மீரண்டாவது கூறில் அவை மீண்டும் சுயவலுவை வளக்கின்றன. விசை செயல்படுகின்ற, சந்திர வலுவை மாறுதல் ஏற்பட்டு, விசை நீங்கிய உடனே சுய வலுவைப் பெறும் இயல்பு 'மீள் இயல்பு' (elasticity) எனப்படும். அல்லாத இயல்பில்லையாயின் மீள் இயல்புடைய (inelastic) பொருள்கள் எனப்படும்.

சூத்திர கார்பு விசைகள் (conservative forces) செயல்படும் தாக்குதலை மூலத்தில் பாற்போம். பொருள்கள் வழவழப்பான மீரண்டு உருண்டை வடிவமான குண்டுகளாகும். ஒன்றுடன் ஒன்று அவை மோதிக்கொள்ளும்போது, தாக்குவிசை அவைகளைத் தவிர்த்துச் சேர்த்துக் கொட்டிக் செயல்படும்.

∴ இத்தகை கோட்டிற்குக் குத்துத் திசையில் உத்த மானதுவோ வேக மானதுவோ ஏற்படாது.



படம் 71.

மூலக் குண்டின் மையம் A-க்குக், மீரண்டாவதின் மையம் B-க்குக், மோதலுக்கு முன்னர் அவற்றின் வேகம் AB திசையில்

முறையே u_A , u_B ஆகும். மோதினவுடன் வேகங்கள் முறையே v_A , v_B ஆகும். திணிவு m_A , m_B ஆகும்.

உந்தக் காப்புக் கொள்கைப்படி

$$m_A u_A + m_B u_B = m_A v_A + m_B v_B \quad \dots\dots(1)$$

ஆற்றலும் மாறுவதில்லை எனக் கொண்டால்,

$$\frac{1}{2} m_A u_A^2 + \frac{1}{2} m_B u_B^2 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2$$

$$\therefore m_A (v_A^2 - u_A^2) = -m_B (v_B^2 - u_B^2)$$

$$m_A (v_A + u_A) (v_A - u_A) = -m_B (v_B + u_B) (v_B - u_B)$$

ஆனால் சமன்பாடு (1)-லிருந்து

$$m_A (v_A - u_A) = -m_B (v_B - u_B)$$

$$\therefore v_A + u_A = v_B + u_B$$

$$\therefore v_B - v_A = - (u_B - u_A)$$

ஆகவே மோதலினால்

தியூட்டன் ஆற்றல் மாறுபடாவிடும்

பத்துகளின்

பிரியும் வேகம் = அமைதி அணுகும் வேகம்

எனக் கூறலாம்.

மீள் நியூட்டியன் கண்டறியக் குண்டுகள், உலோக, தந்தக் குண்டுகள் நிலைகளாகச் செய்யப்பட்ட சோதனைகளில் மோதலுடைய உண்மை முற்றிலும் காணப்படுவதில்லை. மோதலுக்குப் பிறகு ஆற்றல் சக்தி குறைவதாகப் பிழைக் வேகம், அணுகும் வேகத்தில் பிள்ளாமாகவே காணப்படுகிறது.

தியூட்டனின், மீள் நியூட்டியன் பொருள்கள் மோதல் விதி

மீள் நியூட்டியன் இரு பொருள்கள் ஒன்றுடன் ஒன்று மோதிக் கொண்டால்

- (i) ஒன்றைச் சாத்த மந்தநன் வேகத்தின் பொதுக் குத்தப்பிழை மோதலுக்குப் பின்னர் உள்வதும், மூன்று உள்வதும் ஒரு குதிப்பிட்ட விதித்தின் அளவில் இருக்கும்; ஆனால், திசையில் எதிராக அமைவும்.
- (ii) வித்த விதிதம், பொருள்களின் நியுட்டன் பொறுத்ததே தவிர, அவற்றின் திணிவைச் சாத்ததன்று.

நிலையவ திபுட்டளில் மோதல் விதி (laws of impact).
விதைக் கணித மொழியில் கூறுவோம்.

பொருள்களை A, B என்ற மையங்களைமுடைய மீரண்டு குண்டு
களாகக் கொள்வோம்.



படம் 74.

A, B-யுடைய மோதலுக்குமுன்,

A-ன் வேகத்தின் மீறியு AB திசையில் u_A ஆகும்.

B-ன் வேகத்தின் மீறியு AB திசையில் u_B ஆகும்.

AB-க்குக் குத்தாக அயத்தின் மீறியுக்க w_A, w_B ஆகும்.
தாக்குவிசை AB-ல் அமைவதால் w_A, w_B மாறுபடும்.
ஆனால் AB என்ற திசையில் மோதலான உட்க

A-ன் வேகம் v_A

B-ன் வேகம் v_B

என்போம்.

திபுட்டளின் விதி கூறுவது

$$\text{அளவில் மட்டும் } \frac{v_B - v_A}{u_B - u_A} = e \quad (e < 1)$$

ஆனால் $(v_B - v_A)$ -யும், $(u_B - u_A)$ -யும் எதிரெதிர் திசையில்
உள்ளன. ஆகவே,

$$v_B - v_A = -e(u_B - u_A)$$

e எனும் மீதிதல் மீள் லிபல் குணம் (coefficient of elasticity)
எனப்படும். அதன் மதிப்பு ஒன்றுக்குக் குறைந்த மீள்மாரும்.

கண்ணுடிக் குண்டுகளாயின் e ஒரு மதிப்பாகும். தந்தையுடல்
மற்றொரு மதிப்பாகும். ஆனால், ஒரே லிபர்புகடய குண்டுகளுக்கு
அயத்தின் திணிவு (mass) ஏதாயினும் e-ன் மதிப்பு ஒன்றே.

கிழுவே திசுப்பட்டனின் நிரண்டாவது மோதல் விதிபாடும். இவை நிரண்டும் சோதனைகளின் அடிப்படையில் உருவானவை.

கண்ணாடிக் குண்டுகளுக்கு $e = +9$

தந்தம் $e = +8$

நயம் $e = +2$

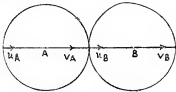
முத்திலும் மீள் நியல்புடையது எனின் $e = 1$

மீள் நியல்புடையது என்றால் $e = 0$; நிரண்டும்

ஒன்றுடன் ஒன்று சேர்த்துகொள்ளும்.

7-2. இரு குண்டுகளின் நேரடி மோதல் (Direct impact of two spheres)

(1) மோதலுக்குப் பின் உள்ள வேகம் கணக்கிட: மோதலுக்கு முன்பு குண்டுகளின் வேகங்கள் முற்றிலும் அமைவானது அமையக்கூடச் சேர்த்தும் கொட்டிக் கிடைத்தால் அத்தகைய மோதல் நேரடி மோதல் (direct impact) எனப்படும்.



படம் 75.

A, B என்ற இரு குண்டுகளின் திணிவு முறையே m_A, m_B ; நேரடி மோதலுக்கு முன் அவற்றின் வேகம் A, B திசையில் முறையே u_A, u_B . பின்னர் u_A, u_B என்றும் v_A, v_B திசுத்தின் அளவுகளைக் காண:

உத்தரவு காப்பு விதிப்படி.

$$m_A u_A + m_B u_B = m_A v_A + m_B v_B \quad \dots (i)$$

திசுப்பட்டனின் மோதல் விதிப்படி.

$$u_A - u_B = -e (v_A - v_B) \quad \dots (ii)$$

(ii)-ஐ m_B -ஆல் பெருக்கி (i) உடன் கூட்ட.

$$(m_A + m_B) v_A = (m_A - e m_B) u_A + m_B (1 + e) u_B$$

(ii)-ஐ m_A -ஆக பெருக்கி (i)-ஐவிடத்து சுழிக்க

$$(m_A + m_B) v_B = (m_B - em_A) v_B + m_A (1 + e) u_A$$

மிகவுலகு மோதலுக்குப் பின் உட்கு குண்டுகளின் வேகம் காண்கிறோம்.

(ii) மோதலினால் ஏற்படும் இயங்குசக்தி இழப்பு: நேரடியாக மோதல் மிகு குண்டுகளின் திணிவு m_A , m_B ஆகும்.

மோதலுக்கு முன்னர் அவற்றின் வேகம் முறையே u_A , u_B ஆகும்.

மோதலுக்குப் பின்னர் அவை முறையே v_A , v_B ஆகும்.

உத்தரக் கார்பு விதிப்படி

$$m_A u_A + m_B u_B = m_A v_A + m_B v_B \quad \dots\dots(1)$$

திட்டப்படலின் மோதல் விதிப்படி

$$v_A - v_B = -e(u_A - u_B) \quad \dots\dots(2)$$

மகிராஞ்சலின் மூற்றெருமைப்படி,

$$\begin{aligned} (m_A + m_B) (m_A u_A^2 + m_B u_B^2) \\ = (m_A v_A^2 + m_B v_B^2) + m_A m_B (u_A - u_B)^2 \quad \dots\dots(3) \end{aligned}$$

மீதேபோல

$$\begin{aligned} (m_A + m_B) (m_A v_A^2 + m_B v_B^2) \\ = (m_A v_A^2 + m_B v_B^2) + m_A m_B (v_A - v_B)^2 \quad \dots\dots(4) \end{aligned}$$

(1), (2) சமன்பாட்டாக

$$\begin{aligned} (m_A + m_B) (m_A v_A^2 + m_B v_B^2) \\ = (m_A u_A^2 + m_B u_B^2) + m_A m_B e^2 (u_A - u_B)^2 \quad \dots\dots(5) \end{aligned}$$

∴ (3)–(5) $(m_A + m_B) \times$ இருபக்க இயங்கு சக்தி இழப்பு

$$= m_A m_B (1 - e^2) (u_A - u_B)^2$$

$$\therefore \text{இயங்குசக்தி இழப்பு} = \frac{m_A m_B}{2(m_A + m_B)} (1 - e^2) (u_A - u_B)^2$$

வலப்புறம் நித்தரக் சமன்பாட்டில் நேரெண்ணுக் கிடுப்பதைக் காணலாம். மோதலாதல் குண்டுகளின் மோதல் வியங்குசக்தி குறைவாக இருப்பதைக் காண்கிறோம்.

குறிப்பு: மோதலுக்கு முன் குண்டுகளின் வேகங்களின் திசை பொதுமையக்கோட்டிலிருந்து சாய்ந்து இருந்தால் u_A , u_B ; v_A , v_B விசைகள் அக்கோட்டில் திசையில் உட்கு வேகங்களின் பிரிவுகளாகும்.

கோட்டிற்குக் குத்தாக மோதலுக்கு முன்னர் m_A , m_B என்பவை வேகங்களின் பிரிவுகளாகும்.

மோதலின் பின்னர் மாறுபடுவதில்லை. ஆகவே, மோதலுக்குப் பின்னரும், அவற்றின் வேகங்கள் m_A , m_B ஆகும்.

மோதலுக்கு முன் நியூட்டனின்

$$= \frac{1}{2} m_A (u_A^2 + v_A^2) + \frac{1}{2} m_B (u_B^2 + v_B^2)$$

மோதலுக்குப் பின் நியூட்டனின்

$$= \frac{1}{2} m_A (v_A^2 + w_A^2) + \frac{1}{2} m_B (v_B^2 + w_B^2)$$

\therefore நியூட்டனின் பிழப்பு

$$= \frac{1}{2} [m_A u_A^2 + m_B u_B^2] - \frac{1}{2} [m_B v_A^2 + m_B w_B^2]$$

இதில் கவனிக்கோட்டுக் குத்தாக உட்கார் பிழையைக் காணும். ஆகவே, சரியான மோதலின் பின்னர் நியூட்டனின் பிழப்பு

$$= \frac{m_A m_B}{2(m_A + m_B)} (1 - e^2) (u_A - u_B)^2$$

(III) மோதல் தாக்கங்கள்: இரு பந்துகள் A , B இவற்றின் திணிவு m_A , m_B ; மோதலுக்கு முன்னர் AB திசையில் அவற்றின் வேகங்கள் u_A , u_B ; பின்னர் அவற்றின் வேகங்கள் v_A , v_B .

\therefore B -ன் மோதல் தாக்கங்கள் $I = B$ -ன் உந்த மாறுதல்

$$I = m_B (v_B - u_B)$$

A -ன் மோதல் தாக்கங்கள் $-I = m_A (v_A - u_A)$

$$\therefore I \left[\frac{1}{m_B} + \frac{1}{m_A} \right] = (v_B - u_B) - (v_A - u_A) = (1 + e) (u_A - u_B)$$

$$I = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} (1 + e) (u_A - u_B)$$

கணக்கு 1: ஒரு வடிவவழிப்பான சமதளத்தில் A , B , C எனும் மூன்று சம வடிவான குண்டுகள் நேர் கோட்டில் உட்காண. B , C -ன் திணிவுகள் சமம்; A -ன் பொருண்மை திணிவு அவற்றைப்போல இரு மடங்கு. AB , BC என்ற திசையில் நடப்பிட்டால், முடிவில் C -ன் வேகம் என்ன என்பதைக் காணவும். மீள் நியூட்டன் குணகத்தின் மதிப்பு $\frac{2}{3}$ எனக் கொள்ளவும்.

A , B இவை மோதல்

குண்டுகள்	திணிவு	வேகம் மோதலுக்கு முன்னர்	பின்னர்
A	$2m$	u	V_A
B	m	0	V_B

$$\begin{aligned}
 \therefore V_A - V_B &= e u \\
 2m V_A + m V_B &= 2mu \\
 \therefore 2V_A + V_B &= 2u \\
 \therefore 3V_A &= u[2 - e] \\
 3V_B &= u[2 + 2e] \\
 \therefore V_B &= \frac{2}{3} u(1 + e) = \frac{2}{3} \times \frac{5}{3} u = \frac{10u}{9}
 \end{aligned}$$

B-ல் C-ல் மோதல்

குண்டு	திணிவு	வேகம் மோதலுக்கு முன்னர்	பின்னர்
B	m	$\frac{10u}{9}$	w_B
C	m	0	w_C

$$w_B - w_C = -e \frac{10u}{9}$$

$$w_B - w_C = -\frac{20u}{27}$$

$$w_B + w_C = \frac{10u}{9}$$

$$\therefore 2w_C = \frac{50u}{27}$$

$$\therefore w_C = \frac{25u}{27}$$

$$\therefore C\text{-ன் வேகம்} = \frac{25}{27}u \quad [A\text{-ன் முதல் வேகம் } u]$$

$$\text{குறிப்பு : } w_B = -\frac{5u}{9}$$

ஆகவே B வந்த வழியே மீள்கிறது. அது A-வுடன் மோதும். மீத மோதலுக்குப் பின்னர் A, B-ன் வேகத்தைக் கணக்கிடவும்.

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. நீரண்டு சமவடிவமுள்ள குண்டுகள் ஒன்றையொன்று நேரடியாகத் தாக்கிக்கொள்ள, மோதலுக்குப் பின்னர் ஒன்றன் வேகம் மற்ற திசைதான் ஆகிறது என்றால் அவைகளின் திணிவுகள் சமமெனவும், முந்திலும் மீள் திசைப்புகைபண என்னும் திறவுக.

2. ஒரே நேர்கோட்டில் மியங்கும் மிரண்டு சிறு குண்டுகள் A , B -ல் A -யினது திணிவு B -யினதைப்போல் n மடங்கு. B -யினது வேகம், A -யின் வேகத்தைப்போல் n மடங்கு. மிரண்டும் ஒரே திசையில் மியங்குகின்றன. B , A ஐத் தாக்கியவுடன் மியங்காது நின்றுவிட்டால் மீள் மியப்பு குணம் $\frac{n+n}{n(n-1)}$ எனக் காண்க.

3. A , B , C என்ற மூன்று சமவடிவமுடைய குண்டுகளின் திணிவு மூன்றையே m , $2m$, m ஆகும். மீள் மியப்பு குணம் $\frac{3}{2}$ எனும் வேகத்துடன் A , B ஐ நோக்கித் தட்டப்படுகிறது. அவற்றின் மிதறி வேகங்கள் $0 : 1 : 2$ எனும் விகிதத்தில் உச்சு என நிழவுக.

4. ஒரே நேர்கோட்டில் ஒரே திசையில் V_1 , V_2 எனும் வேகங்கள் குடும் மியங்கும் மிகு சமவடிவமுடைய குண்டுகள் மோதிக்கொண்டால், அவற்றிடையே ஒன்றிலிருந்து மற்றதற்கு மீளும் உந்த அளவைக் காண்கிறது. மோதலுக்குப் பிறகு அவற்றின் வேகங்கள் u_1 , u_2 என்றும், $V_1 + V_2 + u_1 + u_2 = 0$ எனவும் ஆகும், மிரண்டு குண்டுகளும் தனித்தனியே மிழக்கும் மியங்கு ஆற்றல் சமமெனக் காண்க.

5. ஒரே நேர்கோட்டில் உச்சு A , B , C என்ற மூன்று குண்டு களின் திணிவு மூன்றையே M_A , M_B , M_C ஆகும். A எனும் குண்டு B ஐ நோக்கித் தட்டிவிடப்படுகிறது. குறைந்தது மூன்று மோதல்களாவது ஏற்பட வேண்டுமானால் $M_A M_C (1+e+e^2) > eM_B (M_A + M_B + M_C)$ எனக் காண்க. (e என்பது மீள் மியப்பு குணம்)

6. மிரண்டு சம திணிவு வடிவமுமுள்ள சிறு குண்டுகள் A , B வட்டவடிவமான குழாயிதழ்க்கை. குழாய் கிடைதளத்தி லுள்ளது. AB வட்டத்தின் விட்டமாய் அமைவதும்போது A தளத்தி 't' நேரத்திற்குப் பிறகு B ஐத் தாக்குகிறது. $\frac{2t}{e}$ காலத்திற்குப் பிறகு அவை மறுபடியும் மோதிக்கொள்ளும் என நிழவுக. [M. U. Sept. 63]

7. ஒரு நேர்கோட்டில் m_1 , m_2 , m_3 , ... எனப் பல குண்டுகள் உச் ளன. m_n குண்டிற்கும் m_{n+1} குண்டிற்கும் மோதலில் மீள் மியப்பு குணம் $\frac{m_{n+1}}{m_n}$. முதல் குண்டு புறப்பட்டு மிரண்டாவதைத் தாக்கு கிறது. அதன் விளைவாக ஏற்படும் அடுத்தடுத்த மோதலில் ஒவ்வொரு குண்டின் வேகமும் m_n -ன் புறப்படு வேகமே என நிழவுக.

8. மேற் கணக்கில் குண்டுகள் சம திணிவுகள் உடையனவாகவும் சமவடிவாகவும் கொள்க; அவற்றிடையே மீள் மியப்பு குணம்

e என இருத்தால் மோதலுக்குப் பின்னர் உள்ன வேகங்கள் பெருக்குத் தொடும் உள்னன எனக் காண்க. $\left[\text{பொது வீதம் : } \frac{1+e}{1-e} \right]$

9. A, B என்ற இரு குண்டுகளில் B, A ஐப்போல் இரு மடங்கு திணிவு உடையது. விரண்டும் ஒரே திசையில் நெடுகோட்டில் மிதங்குவிற்றன. B -வின்ன மோதலுதப்போம் 7 மடங்கு வேகத்துடன் A, B ஐத் தாக்கி தின்றுமிட்டால் மீள் மிதப்பு குணகம் $\frac{2}{3}$ எனக் காண்க.

7-3. குண்டு தளத்துடன் மோதல் (Impact of a sphere with a surface)

திட்டட்டளின் மோதல் விதியை மீண்டும் கூறுவேம். இரு பொருள் ளில் ஒன்று மற்ருென்றுடன் மோதும்போது,

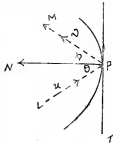
(i) ஒன்றைச் சாத்த மற்ருதன் வேகத்தின் (Relative velocity of one w.r.t. another) குத்துப் பிழிவு, மோதலுக்குப் பின்னர் உள்னதும் குண்டுத் உள்னதும் ஒரு குதிப்பிட்ட விதிதத்தில் இருக்கும்; ஆளுத் திசையில் எதிராக அமையும்.

(ii) மீத்த விதிதம் பொருள்ளின் மிதங்கைப் பொறுத் தமே தவிர அவற்றின் திணிவைச் சாத்த தள்து.

(iii) வேகத்தின் தொடுகோட் டுப் பிழிவு (Tangential component) மாறு படாது.

ஒரு மிதங்கைத் தளத் துடன் ஒரு குண்டின் மோதலைப் பார்ப்போம். தளம் சமதளமாக இருக்க வேண்டியதில்லை. வளை தளமாகவும் இருக்கலாம். AB என்பது வளைதளம்.

ஒரு குண்டு u என்ற வேகத் துடன், தளத்தை P -ல் LP திசை யில் மோதுகிறது. மோதலுக்குப் பிறகு அதன் வேகம் என்ன என்பதைக் காணவேண்டும்.



படம் 75.

வளைவரைக்கு TP தொடுகோடாகு. PN குத்துக்கோடாகு. $\angle LPN = \theta$ ஆகுத.

மோதலுக்குப் பிறகு குண்டின் வேகம் PM என்ற திசையில் v ஆகும். $\angle NPM = \phi$ ஆகும்.

அப்போது குண்டின் தளத்தைச் சந்தித்த வேகம்

மோதலுக்குப்பின்னர் LP திசையில் u

இதன் மிதவு (component) NP திசையில் $u \cos \theta$

தொடுகோடாகிய TP திசையில் $u \sin \theta$.

மோதலுக்குப் பின்னர் சந்தித்த வேகம் PM திசையில் v

\therefore இதன் குத்துப் மிதவு PN திசையில் $v \cos \phi$

தொடுகோடாகிய TP திசையில் $v \sin \phi$

திட்டிடளின் மோதல் விதிப்படி,

$$v \cos \phi = e u \cos \theta \quad [e = \text{உள் மியக்கி குணம்}]$$

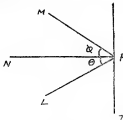
$$v \sin \phi = u \sin \theta$$

$$\tan \phi = \frac{1}{e} \tan \theta;$$

$$v^2 = u^2 [\sin^2 \theta + e^2 \cos^2 \theta]$$

கீழ்வாறு மோதலுக்குப் பின்னர் உள் வேகத்தையும், திசையையும் காணலாம்.

குறிப்பு 1: சமதன்மானமும் கிதே பொருத்தும்; தொடுகோடு தளத்தைக் குறிக்கும்.



படம் 77.

குறிப்பு 2: $e=1$ என்றால் மட்டுமே $\phi = \theta$ ஆகும்.

$v = u$ எனவும் ஆகும்.

மற்றபடி $e < 1$ ஆனதால், $\phi > \theta$; $v < u$ எனவரும்.

$$\begin{aligned}\text{குறிப்பு 3: மோதல் தாக்களவு} &= \text{உத்தரமாதத்தில்} \\ &= m[v \cos \theta - (-u \cos \theta)] \\ &= m[ev \cos \theta + u \cos \theta] \\ &= mu \cos \theta (1+e)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{குறிப்பு 4: இயக்கு ஆற்றல் இழப்பு} &= \frac{1}{2}m(u^2 - v^2) \\ &= \frac{1}{2}mu^2 \{1 - \sin^2 \theta - e^2 \cos^2 \theta\} \\ &= \frac{1}{2}mu^2 \cos^2 \theta (1 - e^2)\end{aligned}$$

7.4. தளத்துடன் குண்டு மோதுதல்

கணக்கு 1: ஒரு சமதளத்திலிருந்து u என்ற வேகத்துடன் கிடைசெட்டிற்கு 'அ' எனும் கோண உயரிலில் ஒரு குண்டு எறிப்படுகிறது. அதன் மீள் இயல்பு குணகம் e எனில் அது தளத்தில் மீண்டும் மீண்டும் $\frac{2u \sin \alpha}{g(1-e)}$ காலத்திற்கு விழுந்து பிறகு தளத்திலேயே உருள்கிறது என நினைவு. (M.U. April 67)

[கிக்குக் குண்டுமீது புவிவீர்ப்பு விசை செயல்படுகிறது. தளத்தில் விழும்போது கணத்தாக்கவிசை நிலைத்தன்மையில் செயல்படுகிறது. ஆகவே குண்டின் வேகத்தின் கிடைநிலை இருவிசைகளாலும் பாதிக்கப்படாமல் மரபு நிலைத்திருக்கிறது. ஆனால் திசைப்பெயர்வு மட்டும் மாறுகிறது.]

$$\begin{aligned}\text{திருபணம்: வேகத்தின் திசைப்பெயர்வு} &= u \sin \alpha \\ \therefore \text{மீண்டும் திரும்பு காலம்} &= t_1 \text{ ஆகுக.} \\ \text{அப்போது} &= \frac{2u \sin \alpha}{g}\end{aligned}$$

$$\text{திரும்பு வேகம்} = u \sin \alpha \text{ கீழ்தோக்கி}$$

$$\therefore \text{மேலெழும் வேகம்} = eu \sin \alpha$$

$$\text{மீண்டும் திரும்பு காலம்} = t_2 = \frac{2eu \sin \alpha}{g}$$

இவ்வாறு அடுத்தடுத்த திரும்புகளையும் மூலையே

$$\frac{2e^2 u \sin \alpha}{g}, \frac{2e^3 u \sin \alpha}{g}, \dots \text{என்பதாலும்}$$

$$\begin{aligned}\text{ஆகவே இவற்றின் கூடுதல்} &= \frac{2u \sin \alpha}{g} (1 + e + e^2 + \dots \infty) \\ &= \frac{2u \sin \alpha}{g} \cdot \frac{1}{1-e} \\ &= \frac{2u \sin \alpha}{g(1-e)}\end{aligned}$$

$e < 1$ ஆகையால் காலம் குறைந்துவிடுவாண்டே வந்து $\frac{2u \sin \alpha}{g(1-e)}$ காலத்திற்குப் பிறகு குண்டு உருக்கிறது.

குறிப்பு 1: மேற்கணக்கில் வேகத்தில் கிடைபிரிவு = $u \cos \alpha$.

∴ புறப்பட்ட இடத்திலிருந்து

$$\frac{2u \sin \alpha}{g(1-e)} u \cos \alpha \text{ தூரத்திலிருந்து அது உருக்கிறது.}$$

$$\text{அதாவது அதன் தூரம்} = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g(1-e)}$$

கணக்கு 2: ஒரு சிறுபந்து, d தூரத்திலுள்ள ஒரு கவரை நோக்கி ' α ' ஏற்றக் கோணத்தில் ' V ' என்ற வேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. அது, கவரில் மோதி, மீண்டு கவரிலிருந்து $e \left[\frac{V^2 \sin 2\alpha}{g} - d \right]$ என்ற தூரத்திலுள்ள இடத்தை அடைகிறது எனக் காண்க. [e என்பது மீள் மிதப்பு குணகம். எறியும் இடம், மீண்டு அடைபும் இடமும் ஒரே கிடைதளத்தில் அமைந்தனவாகும்.]

[கணக்கை ஆராய்வோம்: இங்கு மேற்கணக்கைப் போலவே புவிவீர்ப்பு விசையும் கணத்தாக்கு விசையும் பந்தின்மேல் செயல்படுகின்றன. கணத்தாக்குவிசை கிடைதளத்தில் உச்சுறது. புவிவீர்ப்பு விசை மேல்கிழாக் திசைத்திசையில் உச்சுறது. ஆகவே, மிந்தக் கணக்கில், வேகத்தின் நிலைப்பிரிவை புவிவீர்ப்பு விசை மட்டுமே பாதிக்கிறது.

(ii) கிடைபிரிவு கவரில் மோதும்வரை மாறுது. மோதினபின் உச்சு கிடைபிரிவு விசையும் பின்னர் மாறுது.

இவ்விரு கொள்கைகளைக் கொண்டு கணக்கை விடுவிக்கவேண்டும்.]

நிரூபணம்: பந்து கவரில் பட்டு மீண்டும் அதே கிடைதளத்திற்கு வர ஆகும் காலம் ' t ' ஆகுக.

$$\text{வேகத்தில் நிலைப்பிரிவு} = V \sin \alpha$$

$$\therefore \text{மேல் எழுத்து திரும்ப வரக் காலம்} = \frac{2V \sin \alpha}{g} \dots \dots (1)$$

(ii) கவரில் மோதுவதற்குள்ள காலம் t_1 ஆகுக,

$$\text{கிடைபிரிவு} = V \cos \alpha$$

$$\text{கவரின் தூரம்} = d$$

$$\therefore t_1 = \frac{d}{V \cos \alpha}$$

கவந்திரிவிருந்து மீள்கிடைவேகம் $eV \cos \alpha$

எனல் t_2 ஆகுக; தூரம் x ஆகுக

$$\therefore t_2 = \frac{x}{eV \cos \alpha}$$

$$\text{ஆகையால் } t = t_1 + t_2$$

$$\therefore \frac{2V \sin \alpha}{g} = \frac{d}{V \cos \alpha} + eV \cos \alpha$$

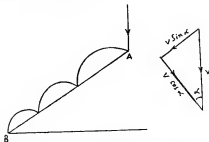
$$\therefore \frac{V^2 \sin 2\alpha}{g} = d + \frac{x}{e}$$

$$\therefore x = e \left[\frac{V^2 \sin 2\alpha}{g} - d \right]$$

கனக்கு 3: ஒரு குண்டு 20 அடி தூரம் நேராக விழுந்து ஒரு சாய்தளத்தைத் தாக்குகிறது. மீண்டும் எழுந்து, மீண்டும் மீண்டும் சாய்தளத்தைத் தாக்கி மீண்டும் மூன்றுவது தாக்கலில் சாய்தளத்தின் அடியை அடைகிறது. தளத்தின் சாய்வு 30° ஆகவும், அடியிலிருந்து முதல் தாக்கலின் தூரம் 12 அடியாகவும் ஆகுக

$$e(1+e)(1+e^2)(1+e+e^2) = 3 \text{ எனக்காட்டு}$$

[e என்பது மீள் திசைப்பகுணம்]



படம் 78

கனக்கை இராயதல்: சாய்தளத்துடன் மேலுயர்தல், தளத்தின் திசையில் கனத்தாக்கு விசையினை. புவிவீர்ப்பு விசையின்

பிரிவுமட்டும் உடனது. தளத்திற்குக் குத்தாகமட்டும் கணத்திற்கு விசைவுள்ளது.

நீறுபணம் :

(i) குண்டு, தளத்தை A என்ற இடத்தில் V எனும் வேகத்துடன் தாக்கமட்டும். அது விழும் தூரம் ' h ' என்றும்

$$V^2 = 2gh \quad \dots\dots(1)$$

(ii) தளத்தின் சமீபத்தில் கீழ்தோக்கிப் பறிவு $V \sin \alpha$ இல் $V \sin \alpha$ என்பது கணத்திற்கு விசையாக மாறுவதில்லை. ஆனால் இதை திசையில் புவிவீர்ப்பு முடுக்கத்தின் பிரிவு $g \sin \alpha$ -ஆக மாறுபடுகிறது. சமீபத்தின் அடி B எனின் $AB=l$ ஆகுக. இதை அடைய காலம் ' t ' ஆகுக.

$\therefore "x = ut + \frac{1}{2}at^2"$ எனும் குத்திரப்படி,

$$l = V \sin \alpha \cdot t + \frac{g \sin \alpha \cdot t^2}{2} \quad \dots\dots(2)$$

(iii) தளத்திற்குக் குத்தாக V -யின் பறிவு தளத்தைநோக்கி $V \cos \alpha$;

அதே திசையில் வீழ்ப்பு முடுக்கத்தின் பறிவு $= g \cos \alpha$.

தாக்குதலுக்கும் பிறகு, வேகத்தின் குத்துப்பறிவு $= eV \cos \alpha$

$$\begin{aligned} \therefore \text{மீண்டும் மூதகமுறை தளத்தில் விழும் காலம்} &= \frac{2eV \cos \alpha}{g \cos \alpha} \\ &= \frac{2eV}{g} \end{aligned}$$

தளத்தை அடையும் வேகம் $eV \cos \alpha$; மீள்வேகம் $e^2V \cos \alpha$

$$\begin{aligned} \therefore \text{மீளண்டாவது மூதக விழும் காலம்} &= \frac{2e^2V \cos \alpha}{g \cos \alpha} \\ &= \frac{2e^2V}{g} \end{aligned}$$

$$\text{இதேபோல மூன்றாவது மூதக விழும் காலம்} = \frac{2e^3V}{g}$$

$$\therefore \text{மொத்தகாலம் } t = \frac{2eV}{g} (1+e+e^2) \dots$$

(2)-ல் பிரதியிட

$$\begin{aligned} \therefore l &= \frac{2eV^2}{g} \sin \alpha (1+e+e^2) + \frac{2e^2V^2}{g} (1+e+e^2)^2 \sin \alpha \\ &= \frac{2eV^2}{g} \sin \alpha [1+e+e^2] (1+e+e^2+e^3) \end{aligned}$$

$$= \frac{2eV^2}{g} \sin \alpha (1+e) (1+e^2) (1+e+e^2)$$

$$\text{மீள்து } V^2 = 2gh; \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

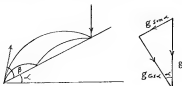
$$l = 2h e(1+e) (1+e^2) (1+e+e^2);$$

$$h = 20 \quad l = 12 \text{ எனப் பிரதியிட}$$

$$\therefore 12 = e(1+e) (1+e^2) (1+e+e^2)$$

கணக்கு 4: கிடைகோட்டிற்கு α கோணத்தில் உயர்த்துகின்ற சாய்தளத்திலிருந்து அதன் அடியிலிருந்து, சாய்தளத்துடன் β கோணத்தில் உட்கா திசையில் V வேகத்துடன் ஒரு குண்டு எறியப்படுகிறது. அது தளத்தில் குத்தாக விழத்தான் $2 \tan \alpha \tan \beta = 1$ என நிழலுக.

அது மீண்டும் எழும்பி மீண்டும் தாவல்களில் புறப்பட்ட மிடத்தை அடைந்தால், மீன் இயல்புக் குணகம் $e = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)$ எனக் காண்க.



படம் 79.

[கணக்கை ஆராய்தல்: (i) தளத்தைக் குத்தாகத் தாக்குகிறது என்றால், அப்போது குண்டு வேகத்தின் சாய்தளத் திசைப்பிரிவு பூஜ்யமாகிறது எனப்பொருளாகும். தளத்தை மீண்டும் அடையும் காலமும், சாய்தளப்பிரிவு பூஜ்யம் ஆகும் காலமும் ஒன்றே. இதைப் பயன்படுத்தி முதல் விடை காணவேண்டும்.

(ii) மீண்டும் தாவல்களுக்கு ஆளும் காலமும், குண்டின் வேகத்தின் சாய்தளப்பிரிவு மீண்டும் புறப்பட்ட அளவுக்கு வரும் காலமும் ஒன்றே. இதை மீண்டாவது விடை காணப் பயன்படுத்தவும்.]

நித்யபணம் :

$$\text{சாய்தளத்தின் திசையில் வேகத்தின் பிரிவு} = V \cos \beta$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{அந்தத்திசைக்கு எதிரான திசையில் எதிர்ப்பு} \\ \text{முடுக்கத்தின் பிரிவு} \end{array} \right\} = g \sin \alpha$$

$$\therefore \text{சாய்தளப்பிரிவு பூந்நிலைக்கே காலம்} = \frac{V \cos \beta}{g \sin \alpha}$$

$$\text{புறப்படுவதில் தளத்திற்குக் குத்துப் பிரிவு} = V \sin \beta$$

$$\text{அதற்கு எதிராகவுள்ள எதிர்பு முடுக்கத்தின் பிரிவு} = g \cos \alpha$$

$$\therefore \text{மீண்டும் குண்டு தளத்தை யண்டாக் காலம்} = \frac{2V \sin \beta}{g \cos \alpha}$$

$$\text{மீண்டும் காலங்களும் சமமானதால்} \frac{V \cos \beta}{g \sin \alpha} = \frac{2V \sin \beta}{g \cos \alpha}$$

$$\therefore 2 \tan \alpha \tan \beta = 1$$

$$(ii) \text{ தளத்தைத் தாக்கும் குத்துவேகம்} = \left. \begin{array}{l} \text{அளவிக் புறப்படும் வேகம்} \end{array} \right\} = V \sin \beta$$

$$\therefore \text{தளத்திலிருந்து எழும்பும் வேகம்} = eV \sin \beta$$

$$\therefore \text{அதற்கு எதிர் முடுக்கம்} = g \cos \alpha$$

$$\therefore \text{திருப்பும்போது மூலக் தாவளுக்கு} \left. \begin{array}{l} \text{ஆளும் காலம்} \end{array} \right\} = \frac{2eV \sin \beta}{g \cos \alpha}$$

$$\text{தாக்கும் வேகம்} = eV \sin \beta$$

$$\therefore \text{மீண்டாவது புறப்படும் வேகம்} = e^2 V \sin \beta$$

$$\therefore \text{மீண்டாவது தாவளுக்கு ஆளும் காலம்} = \frac{2e^2 V \sin \beta}{g \cos \alpha}$$

$$\therefore \text{மொத்தக் காலம்} = \frac{2eV \sin \beta (1+e)}{g \cos \alpha}$$

இது சாய்தளப் பிரிவு வேகம் $g \sin \alpha$ முடுக்கத்துடன் மீண்டும் $V \cos \beta$ ஆவதற்குள்ள காலமாகும்.

$$\therefore \frac{V \cos \beta}{g \sin \alpha} = \frac{2eV \sin \beta (1+e)}{g \cos \alpha}$$

$$\therefore 2 \tan \alpha \tan \beta e(1+e) = 1$$

$$\text{ஆனால் } 2 \tan \alpha \tan \beta = 1$$

$$\therefore e(1+e) = 1$$

$$e^2 + e - 1 = 0$$

$$\therefore e = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. 100 அடி உயரமுள்ள ஒரு கோபுர உச்சியிலிருந்து ஒரு பந்தைக் கிடைதிறையில் 100 அடி வேகத்துடன் எறித்தால், வழுவழப் பாண தரையில்பட்டு மூதல் தரையில் 40 அடி போளும் மீள்கிப்பிப்புக் குணம் 3 எனக் காண்க.

2. ஒரு பந்து 'd' தரத்தில் உள்வ வற்றை நோக்கி எறியப் படுகிறது. அதன் புறப்படும் வேகம் V; திசை கிடைவோட்டிற்கு α கோணம் உயர்த்துகிறது. e மீள் கிப்பிப்புக் குணம். பந்து கவற்றைத் தாக்கி மீண்டும் எறியப்படும் மிடத்தை அடைந்தால்,

$$1 + \frac{1}{e} = \frac{V^2 \sin 2\alpha}{gd} \text{ எனக் காண்க.}$$

3. மெற்கணக்கில் $V = 24\sqrt{3}$, $\alpha = 45^\circ$, $d = 18$, $g = 32$ என்றால் $e = \frac{1}{2}$ எனக் காட்டு.

4. ஒரு சிறு துகள் வழுவழப்பான சாய்தளத்தில் கீழாக நகர்ந்து சமதளத்தில் தாக்கி, எழும்பி விழுகிறது. அது h அடி உயரத்திலிருந்து கிப்பிப் ஆரம்பித்தால் அது மூதல் தரையில் போளும் கிடைதூரம் $4e \cos \alpha \sin \alpha$ எனக் காண்க. (α என்பது சாய்தளத்தின் சாய்வுக் கோணம்; e மீள் கிப்பிப்புக் குணம்)

5. சாய்தளத்தின் அடியிலிருந்து ஒரு பந்து எறியப்படுகிறது. அது சாய்தளத்தை மீண்டும் மீண்டும் தாக்கி மேல்நோக்கிச் சென்று n-வது தாக்கல் சாய்தளத்திற்குத் குத்தாக அமைகிறது. புறப்பட்டதி லிருந்து அதன் n-வது தாக்குதல் மீண்டும் புறப்பட்ட மிடத்திலேயே அமைகிறது என்றால் $e^n - 2e + 1 = 0$.

6. α கோணம் சாய்வுள்ள சாய்தளத்தின் மீது, தளத்துடன் β கோணத்தில் ஒரு பந்து எறியப்படுகிறது. அது n-வது தரையில் மீண்டும் புறப்பட்ட மிடத்தை அடைந்தால் $(1-e) \cot \alpha \cot \beta = 1-e^n$ எனக் காண்க. (e என்பது மீள் கிப்பிப்புக் குணம்)

7. α கோணம் சாய்வுள்ள சாய்தளத்தின் மீது அதனுடன் β கோணமுள்ள திசையில் ஒரு பந்து எறியப்படுகிறது. பந்து தளத்தில் விழுகிறது நேர் மேலே எழும்புகளும் $(e+1) \sin \alpha \sin \beta = \cos (\beta - \alpha)$ எனக்காண்க.

8. தளவட்டத்திலிருந்து ஒரு பந்து 45° உயரக் கோணத்தில் $17\sqrt{2}$ அடி வேகத்தில் எறியப்படுகிறது. $3\frac{1}{2}$ அடி உயரமுள்ள மேசை

மீது விழுந்து மீண்டும் தரையில் விழுகிறது. விழுமிடம், எதிர்ப்பட்ட கிடத்திலிருந்து $2\frac{1}{2}$ அடி தூரத்தில் உள்வது என நிறுவுக.

7-5. சாய்வுத் தாக்குதல் (Oblique impact)

கணக்கு 1: மூத்திரமும் மீள் கியல்புடைய கிடு குண்டுகளில் ஒன்று கியல்புடைய நிலையாக உள்ளது. அதை மற்றது வேகத்துடன் தாக்குகிறது. பிறகு கிரண்டின் பாதைகள் ஒன்றுதொன்று குத்தாகவுள்ளன என்றும் அவற்றின் திணிவுகள் சமமெனக் காண்க. (M. U.)

A என்ற குண்டு B-ஐத் தாக்கட்டும்.

குண்டு	திணிவு	வேகம்		$I'AB$
		A, B திசையில் பின்னர் முன்னர்		
A	m_1	v_A	u	w_A
B	m_2	v_B	0	0

AB-க்குத் குத்து திசையில் வேகப் பிரிவுகள் முன்னரும் பின்னரும் ஒன்றே. மூத்திரமும் மீள் கியல்புடையன ஆதலால் $e = 1$

$$\therefore v_A - v_B = -u$$

$$m_1 v_A + m_2 v_B = m_1 u$$

$$\therefore (m_1 + m_2) v_A = (m_1 - m_2)u$$

B-ன் பாதை AB என்ற திசையிலாகும். ஏனெனில் வேகத்தின் பிரிவு AB-க்குத் குத்து திசையில் 0.

$$\therefore A\text{-ன் பாதை } AB\text{-க்குத் குத்தாகும்.}$$

$$\therefore v_A = 0 \quad \therefore m_1 = m_2$$

$$\therefore \text{குண்டுகளின் திணிவுகள் சமம்.}$$

கணக்கு 2: கிரண்டு குண்டுகள் ஒன்றுடன் ஒன்று மோதிக் கொள்ளும் போது அவைகளின் வேகங்கள் அளவில் u_1, u_2 ; அவற்றின் திசைகள் பொதுமையக் கோட்டுடன் θ_1, θ_2 எனும் கோணச் சாய்வில் உள்ளன. மீள் கியல்புக் குணகம் e ; அவற்றின் திணிவுகள் m_1, m_2 என்றும் மோதலுக்குப் பிறகு அவற்றின் வேகங்களின் அளவை w_1, w_2 திசைவையும் காண்க.

குண்டு	திணிவு	வேகம்		$I'AB$
		AB திசையில் பின்னர் முன்னர்		
A	m_1	v_A	u_A	w_A
B	m_2	v_B	u_B	w_B

(மீள்கு முன்னரும் பின்னரும் AB -க்கு குத்து திசையில் வேகம் பீதியு ஒன்றே $\therefore w_A = u_1 \sin \theta_1$; $w_B = u_2 \sin \theta_2$)

$$\begin{aligned} v_A - v_B &= -e(u_A - u_B) \\ m_1 v_A + m_2 v_B &= m_1 u_A + m_2 u_B \\ \therefore (m_1 + m_2)v_A &= u_A(m_1 - em_2) + m_2 u_B [1+e] \\ (m_1 + m_2)v_B &= m_1 u_A [1+e] + u_B(m_2 - em_1) \\ \therefore \text{ஆனால் } u_A &= u_1 \cos \theta_1 \quad u_B = u_2 \cos \theta_1 \\ \therefore (m_1 + m_2)v_A &= (m_1 - em_2)u_1 \cos \theta_1 + m_2(1+e)u_2 \cos \theta_2 \\ (m_1 + m_2)v_B &= (m_2 - em_1)u_2 \cos \theta_2 + m_1(1+e)u_1 \cos \theta_1 \\ v_A, w_A; v_B, w_B &\text{ விவற்றின் அளவுகள் கண்டதால்} \end{aligned}$$

(i) A -யின் வேக அளவு $\sqrt{v_A^2 + w_A^2}$; B -யின் வேக அளவு $= \sqrt{v_B^2 + w_B^2}$ அவற்றின் திசைகள் AB -யுடன் முறையே ϕ_1, ϕ_2 சாய்வில் இருக்கட்டும் அப்போது

$$(ii) \tan \phi_1 = \frac{w_A}{v_A} \quad \tan \phi_2 = \frac{w_B}{v_B}$$

மீள் பாதைகள் ஒன்றற்கொன்று குத்தானால் $\frac{w_A w_B}{v_A v_B} = -1$ ஆகும்.

$$\therefore v_A v_B + w_A w_B = 0 \text{ ஆகும்.}$$

கணக்கு 3: முற்றிலும் மீள் இயல்புடைய, சமத்திணிவுள்ள குண்டு கள் திறண்டு ஒன்றுதொன்று மோதிக்கொள்ளும் போது அவைகளின் வேகங்கள் அளவில் சமமாகவும், திசையில் குத்தாகவும், ஒன்றின் வேகம் பொதுமையாக் கேட்டுத்திசையிலும் உள்வரை. மற்றதன் திசை, மோதவிடும் 45° திருப்புகிறது என திதுவுக. ($M.U.$)

குண்டுகள்	திணிவு	AB திசையில் வேகம்	AB திசையில் வேகம்	$\perp AB$ வேகம்
A	m	v_A	u_A	0
B	m	v_B	0	w_B
	$e = 1$			

$$\therefore v_A - v_B = -u_A$$

$$v_A + v_B = u_A$$

$$\therefore v_B = u_A$$

$\therefore B$ -ன் வேகத்தின் சாய்வு AB -யுடன் 60° சாய்வாகும்

$$\tan \theta = \frac{w_B}{v_B} = \frac{w_B}{u_A} \text{ ஆனால் } w_B = u_A$$

$$\therefore \tan \theta = 1 \quad \therefore \theta = 45^\circ$$

$\therefore B$ -யின் திசை 45° சாய்வில் திருப்புகிறது.

கணக்கு 4: M எனும் திணிவுள்ள நிலையாக இருக்கும் குண்டை, m எனும் திணிவுடைய குண்டு சாய்வாகத் தாக்குகிறது. $m = eM$ என்றால் குண்டுகளின் வேகங்களின் திசையைக் காண்க.

குண்டுகள்	திணிவு	AB திசையில் வேகம் பின்னத் முன்னத்	$\perp AB$ வேகம்
A	M	v_A	O
B	m	v_B	u_B

$m = eM$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore v_A - v_B = u_B$$

$$Mv_A + mv_B = mu_B$$

$$\therefore (M+m)v_A = mv_B(1+e)$$

$$(M+m)v_B = u_B(m - eM) = 0$$

$$\therefore v_B = 0$$

\therefore குண்டு B -யின் AB திசைவேகம் மோதலுக்குப் பிறகு 0

\therefore குண்டு B , AB -க்குத் குத்தாகச் செல்கிறது.

குண்டு A ; AB திசையில் செல்கிறது.

மீராண்டு பாதைகளும் ஒன்றித்தொன்று குத்தானவை.

[குறிப்பு: (i) நேரடித் தாக்குதலாலும் குண்டு B நிற்குமீடும்; A மட்டும் AB திசையில் போகும்.]

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. M என்ற திணிவு உட்கு ஒரு குண்டு A , ஒரு வழவழப்பான சமதளத்தில் நிலையாக உட்கு. அதை m என்ற திணிவு உட்கு B எனும் குண்டு சாய்வாகத் தாக்குகிறது. B -ன் வேகம் திசையில் 90° திரும்பினால் $m < eM$ எனக் காண்க. மோதலுக்கு முன்னரும் பின்னரும் உட்கு மியக்கு ஆற்றம் $1 : e$ எனும் விகிதத்தில் உட்குது எனவும் காண்க.

2. A , B , C என்பவை மூன்று சமத் திணிவும் வடிவமும் உட்குய குண்டுகள். வழவழப்பான சமதளத்தில் A -யும் B -யும் நெருங்கியுள்ளன. அவற்றின் போதத் தொடுகோட்டிலிருந்து சந்தே சாய்ந்த கோட்டில் C -ஐத் தட்டிவிட அது A -ஐ மூலவில் தாக்குகிறது. உட்கு B -ஐயும் தாக்குகிறது. $e = \frac{1}{2}$ என்றால் A , B -யின் வேகங்களின் விகிதம் $3 : 5$ என திருவுக. (M.U. 56 B).

3. சமநிலையில், சமதளத்தில் உட்கு A என்றும் குண்டு மீது B மோதுகிறது. மோதலுக்குப் பிறகு அவற்றின் பாதைகள் ஒன்றி

கொன்று சூத்திரமும் அவற்றின் திணிவுகளின் விகிதம் $e:1$ அல்லது $1:e$ எனக் காண்க. (M. U.)

4. ஒரு வட்டவளைவம் ஒரு சமதளத்தில் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. வட்டப்பரப்பில் உள்ளிருந்து ஒரு சிறுகுண்டு தட்டிவிடப்படுகிறது. வளைவத்தில் இருமுனைப்பட்டு மீண்டும் புதப்பட்ட மிடத்திற்கே அது வந்தால், புதப்பட்ட திசை ஐந்தாண்டில் $\tan^{-1}\left(\frac{e^3}{1+e+e^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ கோணச் சாய்வில் உள்ளதென நிறுவுக. (M. U.)

5. A, B என்ற மிகுஞ்சூடுகளில் A -யின் திணிவு B -யின் திணிவைப் போல் மிகுமடங்கு. அவை மோதிக் கொள்ளும்போது அவற்றின் வேகங்களின் சமவகவும், ஒன்றற்கொன்று எதிர்த் திசையிலும் பொது மையக் கோட்டுடன் 30° சாய்விலும் உள்ளன. e எந்த என்றால், மோதலுக்குப் பிறகு அவற்றின் வேகங்களையும் திசைகளையும் காண்க.

$$\left(\theta = 90^\circ; v = \frac{u}{2}; \phi = 30^\circ; v^2 = u \right)$$

8. வட்ட இயக்கம் (Circular Motion)

8.1. கித்தப் பகுதியில் சீரான வேகத்துடன் ஒரு வட்டத்தில் நியங்கும் துகளின் இயக்கத்தைப் பற்றிப் பார்ப்போம்.

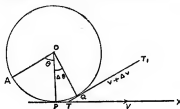
இயக்கத்தினை நியூட்டனின் மூலக் விதிப்படி, ஒரு நேர்கோட்டில் சீரான வேகத்துடன் சென்றுகொண்டிருக்கும் ஒரு துகள் புறவிசை ஒன்று செயற்பட்டாலன்றித் தன் திசையையோ, வேகத்தையோ மாற்றாது. ஆகவே வட்டத்தில் வீது நியங்கிக்கொண்டிருக்கும் துகளின் மீது, அது நேர்கோட்டிலேயே சென்றுகொண்டிருந்தால், ஒரு விசை செயற்படவேண்டும்.

விசை ஒன்று துகளின் திசையிலேயே செயற்படுமாயின், அதன் வேகத்தை மாற்றும்; ஆனால் திசையை மாற்றாது. ஒரு வளைவுப் பாதையில் செல்லும் துகளின் இயக்கத்தினை எந்தக் கணத்திலும், தொடுகோட்டுத் திசையாகும். எனவே, வட்டத்தில் சீரான வேகத்தில் நியங்கிக்கொண்டிருக்கும் துகளின் மீது, வேகம் மாறாத வரணத்தால், தொடுகோட்டுத்திசையில், எந்த விசையும் செயற்பட முடியாது. ஆகவே ஒரு துகள் வட்டப்பாதையில், சீரான வேகத்துடன் நியங்கு வதற்கு வேண்டிய விசை, துகளின் இயக்கத் திசைக்கு நேர்க்குத்துத் திசையில்தான் செயற்படவேண்டும் என்பது தெளிவு. கிவ்வாறு மையத்தை நோக்கிச் செயற்படும் விசையின் காரணமாக, பொருள் அத்திசையில் ஒரு முடுக்கம் பெறுகிறது. அந்த முடுக்கம் மைய முடுக்கம் (normal acceleration) எனப்படும். மையத்தை நோக்கிச் செயற்படும் அம் விசைக்கு மையநோக்கு விசை (Centripetal force) எனப் பெயர். கிவ் விசை துகளின்மீது செயற்படும் புறவிசை களால் அளிக்கப்படுகின்றது.

வட்டப்பாதையில் செல்லும்போது, வேகமும் மாறுமேயானால், இயக்கத் திசையான தொடுகோட்டுத் திசையிலும், இயக்கத் திசைக்கு

நேர்வுத்தித் திசையிலும் விசை செயற்படும். ஆகவே கீழ்க்கு திசைகளிலுமே முடுக்கம் இருக்கும்.

8-2. ஒரு வட்டத்தில் இயங்கும் துகளின் தொடுகோட்டு முடுக்கத்திற்கும், லம்ப முடுக்கத்திற்குமான கோவைகள்.
(Tangential and Normal Acceleration)



படம் 80.

ஈ என்ற திணிவு உடைய ஒரு துகள் O என்ற மையத்தையும், r என்ற ஆரத்தையும் கொண்ட ஒரு வட்டத்தில் இயங்குவதாகக் கொள்வோம். வட்டத்தின் மேல் உள்ள A என்ற நிலையான புள்ளியில் இருந்து வட்டவிலகித் திசையை அளக்கிறோம்.

வட்டத்தில் P என்ற புள்ளி ஏதாவது ஒரு கணத்திற் துகளின் நிலையையும், Q யினை குறுகிய கால அளவிற்குப் (Δt) பின் அதன் நிலையையும் குறிக்கட்டும். P, Q புள்ளிகளில் துகளின் திசையேகம் முறையே v , $v + \Delta v$ என இருக்கட்டும். v , PTX என்ற தொடுவரைத் திசையிலும், $v + \Delta v$, TQF₁ என்ற தொடுவரைத் திசையிலும் இருக்கும்.

மிக $AP = s$; மிக $AQ = s + \Delta s$ எனில் $PQ = \Delta s$
 $\angle AOP = \theta$; $\angle AOQ = \theta + \Delta \theta$ எனில் $\angle POQ = \Delta \theta$;
 $\angle QTX = \Delta \theta$.

$v = P$ -ல் திசையேகம்
 $= t$ -ஐப் பொறுத்த s -ன் மாறுபாடும்

$$\therefore v = \frac{ds}{dt} \quad \dots \dots \dots (1)$$

Q-ல் திசை வேகத்தை PTX திசையிலும், அதற்குக் குத்தான PO திசையிலும் பிரிப்போமானால்,

PTX திசையில் :

$$\text{துகளின் திசைவேக மாறுபாடு} = (v + \Delta v) \cos \Delta\theta - v$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{துகளின் முடுக்கம்} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(v + \Delta v) \cos \Delta\theta - v}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(v + \Delta v) - v}{\Delta t} \quad [\because \cos \Delta\theta \rightarrow 1] \\ &= \frac{dv}{dt} \quad \dots \quad \dots \quad (2) \end{aligned}$$

PO திசையில் :

$$\text{துகளின் திசைவேக மாறுபாடு} = (v + \Delta v) \sin \Delta\theta - 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{துகளின் முடுக்கம்} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(v + \Delta v) \sin \Delta\theta}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(v + \Delta v) \Delta\theta}{\Delta t} \quad [\because \sin \Delta\theta \rightarrow \Delta\theta] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad [\Delta v, \Delta\theta \text{ ஒதுக்கிவிட}] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v \cdot \frac{\Delta\theta}{r \cdot \Delta\theta} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \\ &= v \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{ds}{dt} \\ &= v \cdot \frac{1}{r} \cdot v \text{ (சமன்பாடு)} \\ &= \frac{v^2}{r} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3) \end{aligned}$$

குறிப்பு :

துகள் வட்டத்தில் சீரான வேகம் உடனடி இயங்கினால், $\frac{dv}{dt} = 0$

$$\therefore \text{தொடுகோட்டு முடுக்கம்} = 0$$

$$\text{மைய முடுக்கம்} = \frac{v^2}{r}$$

துகளின் கோணவேகம் ω எனில்,

$$\left[\begin{array}{l} v = r\omega \\ \therefore \text{வம்ப முடுக்கம்} = \frac{r^2\omega^2}{r} \\ = r\omega^2 \end{array} \right] \quad \because v = \frac{ds}{dt} = \frac{L\theta}{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \\ = \frac{L\theta}{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r \cdot \Delta \theta}{\Delta t} \\ = r \frac{d\theta}{dt}$$

எனவே வட்டத்தில் சீரான வேகத்துடன் இயங்கும் துகளின்

$$\text{வம்ப முடுக்கம்} = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

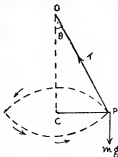
$$\text{மையநேரக்கு விசை} = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2$$

8-3. கூம்பு ஊசல் (Conical Pendulum)

ஒரு நிலையான புள்ளியில் இருந்து ஒரு மிதமான, மிருபடாத தூண் (அல்லது தண்டம்) தொங்கவிடப்பட்ட ஒரு துகள், கிடைதளத்தில் ஒரு வட்டத்தில் இயங்குமளவின், துகள் அத் நிலையான புள்ளி வழியே செல்லும் செங்குத்துக் கோட்டை அச்சாகவோண்ட ஒரு கூம்பை அமைக்கும். இவ்வாறு இயங்கும் துகளும், தூணும் சேர்த்த அமைப்பு, கூம்பு ஊசல் எனப்படும்.

இங்கு கிடைதளத்தில் வட்டத்தில் இயங்கும் துகள், சீரான வேகத்துடன் இயங்கும்போது அமைவும் கூம்பு ஊசலில் பற்றிக் காண்போம்.

படத்தில் O நிலையான புள்ளியையும், P துகளையும் குறிக்கின்றன. தூளின் நீளம் l எனவும், துகள் செங்குத்து நிலையாக அமைக்கும் கோணம் θ எனவும் கொள்வோம். துகளின் நிறை m எனவும், துகள் இயங்கும் வட்டத்தின் ஆரம் r எனவும், துகளின் கோணவேகம் ω எனவும் கொள்வோம்.



படம் 81.

துகளின் மீது செயற்படும் விசைகள் நிரொடு மட்டுமே:

1. PO வழியே செயற்படும், கவிற்றின் நிரொடுவிசை T

2. செங்குத்தாகக் கீழேநோக்கிச் செயற்படும் துகளின் எடை mg

செங்குத்துத் திசையில் துகள் எவ்வித நியக்கமும் பெறவில்லை.

$$\therefore T \cos \theta = mg \quad \dots \dots \dots (1)$$

நிரொடுவிசையின் கிடைக்காது, துகள் வட்டத்தின் சீராக நியக்க வேண்டிய காலப்போக்கு விசையை அளிக்கிறது ($mr\omega^2$)

$$\begin{aligned} \therefore T \sin \theta &= mr\omega^2 \quad \dots \dots \dots (2) \\ &= m(l \sin \theta)\omega^2 \end{aligned}$$

$$\therefore T \sin \theta - ml\omega^2 \sin \theta = 0$$

$$(T - ml\omega^2) \sin \theta = 0$$

$$\therefore \sin \theta = 0 \text{ அல்லது } T = ml\omega^2$$

$\sin \theta = 0$ எனில், $\theta = 0$; துகள் தூவின் முனையில் நேர்த்தீழே நிரூபிக்கின்றது. இந்த நிலையில் வட்டத்தின் நியக்கம் இல்லை. ஆகவே $\theta \neq 0$ எனில்,

$$T = ml\omega^2 \quad \dots \dots \dots (3)$$

இதை (1)-ல் பிரதியிடுவோம்

$$\cos \theta = \frac{g}{l\omega^2} \quad \dots \dots \dots (4)$$

இத்தகைய சமன்பாடு செங்குத்தாகப் பட்டுள்ள கோண வேகத்துடன் கழுவும் கூம்பு ஊரவின், செங்குத்து நிலையோடு துகள் அமைக்கும், கோணத்தை தருகின்றது.

$$\text{மேலும், } \cos \theta \leq 1$$

ஆகவே துகள் வட்டத்தின் நியக்க வேண்டாமெனில், $\theta \neq 0$

எனவே,

$$\cos \theta < 1$$

$$\therefore g < l\omega^2$$

அல்லது

$$\omega^2 > \frac{g}{l} \quad \dots \dots \dots (5)$$

மிதில் இருந்து தூண் l நீளமுள்ள தூரேண்டு வம்பு ஊசல் அமைக்க, அதன் கோண வேகம் ω , $\sqrt{\frac{g}{l}}$ விட அதிகமாக இருக்க வேண்டும் என அறிகிறோம்.

இனி, C-ல் இருந்து துகளின் ஆழம் h எனில்,

$$ON = h = l \cos \theta = \frac{g}{\omega^2}$$

$$\therefore \omega^2 = \frac{g}{h}$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{g}{h}} \quad \dots \quad \dots \quad \dots (6)$$

மிததச் சமன்பாட்டிலிருந்து ஊசலின் கோண வேகம் துகளின் ஆழத்தில் வரக்கூடியிருக்கும் எதிர் விசைத்திசில் இருக்கிறது. அது தூயில் நீளத்தைச் சார்ந்திருப்பதில்லை என்று காண்கிறோம்.

அகிலது

தொடங்கு தாளத்தில் இருந்து துகளின் ஆழம், தூயில் நீளத்தைச் சார்ந்திராமல், கோண வேகத்தின் இரு மடக்கு எதிர் விசைத்திசில் இருக்கிறது என்று கூறலாம்.

சமன்பாடு (6)-ல் இருந்து, ஊசல் ஒரு முறை சுற்றி வர ஆகும் காலம் T எனில்,

$$\text{சுழற்சி நேரம் } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}} \quad \dots \quad \dots \quad \dots (7)$$

துகள் வட்டத்தை விடாதுக்கு n முறை சுற்றி வந்தால்,

$$\omega = 2\pi n$$

சமன்பாடு (3)-ல் இருந்து

$$T = \frac{1}{n^2} \quad \dots \quad \dots \quad \dots (8)$$

குறிப்பு:

1. ஊசலின் நீளம் l கொடுக்கப்பட்ட அளவுக்கதாரி, மின் மறிப்புக் கற்றழியை அடைந்தால் மட்டுமே, θ -ன் மதிப்பு 90° ஆக முடியும். (சமன்பாடு 4-ஐப் பார்க்க). ஆகவே துகள் O வழியே செல்லும் கிடை மட்டத்தில் ஈட்டப் பாதையில் சுழலுவதென்பது இயலாதது.

2. துகளின் திசை வேகம் $v = r\omega$

$$\therefore v^2 = r^2\omega^2$$

$$= (l^2 \sin^2 \theta) \left(\frac{g}{l \cos \theta} \right)$$

$$v^2 = gl \sin \theta \cdot \tan \theta$$

3. கூம்பு ஊசலில் அமையும் துகள், ஸ்ரஸ்ரப்பான கிடைதள மேசையில் ஈட்டப் பாதையில் இயங்குமாதும், சமன்பாடு (1) $T \cos \theta + R = mg$ ஆகும்.

இதில் R என்பது, துகளின் மீது செயற்படும் எதிர்விசை.

$$\therefore R = mg - T \cos \theta$$

$$= mg - m l \omega^2 \frac{h}{l}$$

$$R = mg - m h \omega^2$$

ஆகவே, துகள் மேசை மீதே கற்ற வேண்டுமெனில்,

$$R > 0$$

$$\therefore g > h \omega^2$$

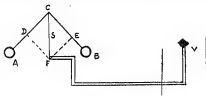
$$\omega < \sqrt{\frac{g}{h}}$$

$$\text{அதாவது } n < \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{h}} \quad (\because \omega = 2\pi n)$$

8-4. நீராய் இயந்திரங்களின் வேகம் காக்கும் அமைப்பு (Governors of steam-engines)

ஒரு துகள், கூம்பு ஊசல் அமைப்பில் சுழலும்போது, தொங்கு தாளத்தில் இருந்து துகளின் ஆழம், அதன் கோண வேகத்தை மட்டுமே சார்ந்தது என்ற கருத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு, ஒரு நீராய் வந்திரத்தில், நீராயிலின் அளவைக் கட்டுப்படுத்தும் இத்தக் கருவி அமைக்கப்படுகிறது.

ச என்பது நீரால் மத்திரத்தால் சுழற்றப்படும் ஊடக முனை (shaft). இதனுடன் CA, CB என்ற இரு உலோகச் சட்டங்கள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அவைகளில் மறு முனைகளில் A, B என்ற இரு எடைகள் உள்ளன. ஊடக முனையின் சுழற்சிவாதி, உலோகச் சட்டங்கள் இரண்டும் சுழலுவதால், A, B என்ற இத்த இரு எடைகளும்



படம் 62.

சுழன்று வருகின்றன. [இவ்வாறு அமைத்த நீரால் எத்திரத்தின் வேகம் காக்கும் அமைவுநனை ஓர் இரட்டைக் கூம்பு ஊசலாகக் கருதலாம்.] இவ்விரு உலோகச் சட்டங்களும் DF, EF என்ற மற்றவரு உலோகச் சட்டங்களாக, F என்ற ஒரு நழுவு வளையத்துடன் (collar) இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இத்த நழுவு வளையம், S என்ற ஊடக முனையில் மேலும் கீழும் செல்லத்தக்கவாறு அமைக்கப்படுகிறது. F என்ற இத்த நழுவு வளையத்துடன் ஒரு நெம்புகோல் அமைப்பு இணைக்கப்படுகிறது. இத்த நெம்புகோல் அமைப்பு, வளையம் மேலே செல்லும்போது, மத்திரத்திக்கு நீரால் செல்லும் பாதையைச் சற்று மூடி நீராயினால் போக்கைக் கட்டுப்படுத்துமாறும், வளையம் கீழே இறங்கும்போது நீராயினால் பாதை திறத்து நீராயினால் போக்கு அதிகரிக்குமாறும் அமைக்கப்படுகிறது.

கூம்பு ஊசலின் நீளம் l எனவும், கோணவேகம் ω எனவும் கொண்டால்,

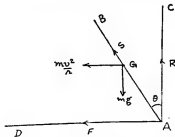
$$\cos \theta = \frac{r}{l \omega^2} \quad [\text{எமன்பாடு 4}]$$

மத்திரத்தின் வேகம் அதிகமாகும்போது, ஊடக முனையின் சுழற்சி வேகமும் அதிகமாகின்றது. ஆகவே A, B இவற்றின் கோணவேகமும் (ω) அதிகரிக்கின்றது. ஆகவே $\cos \theta$ -ன் மதிப்பு குறையகின்றது. θ -ன் மதிப்பு அதிகமாகின்றது. எனவே CA, CB மேலே உயர்கின்றன. இதனால் ஊடக முனையின் மேல் தகரும் F, மேலே செல்லுகிறது.

இதனும், இதனுடன் இணைக்கப்பட்ட நெய்புகோல் அமைப்பு நியத்திரத் திக்கு நீராவி செல்லும் பாதையை மூடச் செய்யும். ஆகவே நீராவியின் போக்குக் குறைந்து, வேகம் மட்டுப்படுத்தப்படுகிறது. இவ்வாறு நியத்திரத்தின் வேகம் அதிகமாகும்போது வேகம் கட்டுப்படுத்தப்பட்டு ஒரு சமநிலைக்கு வருகின்றது.

இவ்வாறே, வேகம் குறையும்போது, ம-ன் மதிப்பு குறைகிறது. ஆகவே $\cos \theta$ -ன் மதிப்புக் கூடுகின்றது. θ -ன் மதிப்புக் குறைகின்றது. எனவே CA , CB சிற்றோக்கிச் செல்கின்றன. இவற்றுடன் F -ன் சிற்றோக்கிச் செல்வதால், நீராவியின் பாதை நிறுக்கப்பட்டு நீராவியின் போக்கு அதிகமாகின்றது. மறுபடியும் வேகம் ஆச் சமநிலைக்கு வரும் வரையில் நீராவி இவ்வாறு அதிகமாகச் செலுத்தப்படுகிறது. இம் முறையில் நியத்திரத்தின் வேகம் தானாகவே கட்டுப்படுத்தப்படுகின்றது.

8-5. வட்டப்பாதை வழியே சுரக்கலில் செல்பவரின் இயக்கம்



படம் 85.

ஒரு வட்டப்பாதையில் சுரக்கலில் செல்லும்போது நம்மவு மதியானல் வட்டப்பாதையின் மையத்தை நோக்கிச் சிதிலு சாய்ந்த நிலையில் செல்கிறோம். இதனால் நகரயின் விசை, செங்குத்து திசைக்கு சரித்த திசையில் செயல்படுகிறது. இந்த விசையின் கடைதளக் கூறான நகரயின் உராய்வு விசை (Frictional force) வட்டப்பாதையில் செல்ல அவசியமான மையநோக்கு விசையை அளிக்கின்றது.

மட்டத்தில் AB கைக்கிழையும், அதன்மீது செல்பலனையும் குறிக்கின்றது. அவர்களின் திணிவு m என்போம். G அவர்களின் புறாப்பு கையத்தைக் குறிக்கின்றது. சக்கரம் A எழும்படத்தில் தரைவைத் தொடுகிறது.

AC , A வழியே செல்லும் செங்குத்துக்கோடு

AD , A வழியே செல்லும் கிடைகோடு

$\angle BAC = \theta$ எனக் கொள்வோம்.

கைக்கிள், அதன்மீது செல்பலன்மீது செயற்படும் விசைகள்

- (i) செங்குத்தாக G வழியே கீழ்தோக்கிச் செயற்படும் எடை mg
- (ii) உட்புறமாக AD வழி செயற்படும் தரையின் உராய்வு விசை F
- (iii) செங்குத்துத் திசையில் (AC) செயற்படும் தரையின் எதிர் விசை R .

G வட்டப்பாதையில் செல்கிறது. mg , G வழியே செயல்படுகிறது. எனவே R , F இவற்றின் தொகுப்பான தரையின் மொத்த விசை S , G வழியே செயல்படும்.

வட்டப்பாதையின் ஆரம் r எனவும், பாதையில் கைக்கிளின் செல்பலன் v எனும் சீரான வேகத்துடனும் செல்வதாகக் கொண்டால்,

$$R = S \cos \theta = mg \quad \dots\dots(1)$$

$$F = S \sin \theta = \frac{mv^2}{r} \quad \dots\dots(2)$$

எனவே,

$$\tan \theta = \frac{v^2}{rg} \quad \dots\dots(3)$$

மீதிலிருந்து கொடுத்தான் ஆரமுடைய ஒரு வட்டப்பாதையில், ஒரு குறிப்பிட்ட வேகத்தில், கீழே விழாமல் செல்ல, செங்குத்து திசை புடவ் எந்த அளவு சாயவேண்டியிருக்கும் என்பதைக் கணக்கிடலாம்.

மேலும், v -ன் மதிப்பு அதிகமானாலோ அல்லது r -ன் மதிப்புக் குறைந்தாலோ $\tan \theta$ -ன் மதிப்பு அதிகமாகின்றது. எனவே θ , அதாவது, செங்குத்து திசைபுடன் சாயவேண்டியிருக்கும் கோணம் அதிகமாகின்றது. எனவே, ஒரு வளைவுப்பாதையில் அதிக வேகமாகச் சென்றாலோ அல்லது மிகச் சிறிய ஆரமுடைய ஒரு வளைவில் செல்ல நினைத்தாலோ, கீழே விழுந்துவிட நேரிடும்.

குறிப்பு :

$$R = mg \quad \dots\dots(4)$$

$$F = \frac{mv^2}{r} \quad \dots\dots(5)$$

(5)-ல் இருந்து, ஒரு குறிப்பிட்ட வளைவுப் பாதையில் சுரக்கிற செல்லம் ஒருவரின் வேகம் அதிகமாகும்போது, உராய்வு விசையும் அதிகமாகின்றது, எனக் காண்கிறோம். உராய்வு எண் μ எனில், F பெறக்கூடிய அதிகபட்ச மதிப்பு எவ்வளவு உராய்வு விசையான μR ஆகும்.

$$\therefore F < \mu R$$

$$\frac{mv^2}{r} < \mu mg$$

$$\therefore v^2 < \mu gr \quad \dots\dots(6)$$

எனவே r ஆரமும், உராய்வு எண் μ -ம் ஆன ஒரு வட்டப் பாதையில் செல்கக்கூடிய உச்ச வேகம் $= \sqrt{\mu gr}$. எனவே கொடுக்கப்பட்ட வளைவுப்பாதையில், சுரக்கிற நழுபா வண்டி எவ்வளவு வேகம், $\sqrt{\mu gr}$ -க்கு மேல் இருக்கக்கூடாது,

மேலும்,

$$r > \frac{v^2}{\mu g}$$

$$\dots\dots(7)$$

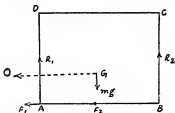
ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட வேகத்தின் செல்கக்கூடிய வட்டப் பாதையின் குறைந்தபட்ச ஆரம் $= \frac{v^2}{\mu g}$; அதாவது v அதிகமானாலே அல்லது உராய்வு எண் சிறிவதாக இருந்தாலே, வட்டப்பாதையின் ஆரம் பெரிவதாக இருத்தல் வேண்டும்.

8-6. சமதளத்தில் அமைந்த வட்டப்பாதையில் இரயில் பெட்டியின் இயக்கம்

சமதளத்தில் அமைந்த, r ஆரமுள்ள ஒரு வட்டப்பாதையில், v எனும் சீரான வேகத்துடன் ஓர் இரயில் பெட்டி செல்வதற்குத் தேவையான எமயதோக்கு விசையை $\left(\frac{mv^2}{r}\right)$, தண்டவாளங்களுக்கும், சக்கரங்களுக்கும் விடையே உள்ள அழுத்தம் அளிக்கின்றது.

[வெளிச்சக்கரத்திலிருந்து தண்டவாளம் செயற்படுத்தும் அழுத்தமும், உட்சக்கரம் தண்டவாளத்திலிருந்து செயற்படுத்தும் அழுத்தமும், வட்டப்பாதையில் பெட்டி செல்வதற்குத் தேவையான மைய நோக்கு விசையை அளிக்கின்றன.

ஒரு வட்டப்பாதையில் செல்லும் மோட்டர்கார் ஒன்றுக்கும் இதைப் போன்ற இயக்கம் காணும். தண்டவாளங்களுக்கும், சக்கரங்களுக்கும் இடையே உள்ள அழுத்தத்துக்குப் பதிலாக, காக்கும் பாதைக்கும் இடையே உள்ள உராய்வு விசை, தேவையான மையநோக்கு விசையை அளிக்கின்றது.]



படம் 84.

படத்தில் ABCD, பெட்டியின் புறவட்டப் பக்கம் (C), வட்டப் பாதையின் மையம் (O) ஆகியவற்றின் வழியே செல்லும் செங்குத்துத் தளவெட்டு முகத்தைக் குறிக்கிறது. A-ம், B-ம் சக்கரங்கள் தண்டவாளங்களைத் தொடும் புள்ளிகளைக் குறிக்கின்றன. A பாதையின் உட்புறத்தில் அமைந்துள்ளது.

AB = தண்டவாளங்களுக்கு இடையே உள்ள தூரம் = $2a$ என்போம்.

R_1, R_2 செங்குத்துத் தளத்தில், தண்டவாளங்கள் செயற்படுத்தும் எதிர்விசைகளையும், F_1, F_2 தண்டவாளங்களுக்கும், சக்கரங்களுக்கும் இடையே உட்புறமாகச் செயற்படும் அழுத்தத்தையும் குறிக்கின்றன. மற்றொரு வெளி விசையான பெட்டியின் எடை mg , செங்குத்துத் திசையில் கீழ்நோக்கிச் செயற்படும். $F_1 + F_2 = F$ என்போம். F, BA வழிச் செயற்படுகிறது.

செங்குத்து திசையில், கிடைமட்டத்திலும் இயக்கச் சமன் பாடுகள், எழுத

$$R_1 + R_2 = mg \quad \text{.....(1)}$$

$$F = F_1 + F_2 = \frac{mv^2}{r} \quad \text{.....(2)}$$

சுழிப்பற்றிய திருப்புதிறன்,

$$R_2 a - R_1 a - Fh = 0 \quad \text{.....(3)}$$

[$h =$ பெட்டியின் புவிசர்ப்பு மையத்தின் உயரம்]

$$\therefore R_2 - R_1 = \frac{Fh}{a}$$

$$R_2 - R_1 = \frac{mv^2}{r} \cdot \frac{h}{a}$$

$$R_2 + R_1 = mg$$

எனவே,

$$R_2 = \frac{1}{2} \left[mg + \frac{mv^2 h}{ra} \right]$$

$$R_2 = \frac{m}{2} \left[g + \frac{v^2 h}{ra} \right] \quad \text{.....(4)}$$

$$R_1 = \frac{m}{2} \left[g - \frac{v^2 h}{ra} \right] \quad \text{.....(5)}$$

மித்தச் சமன்பாடுகளில் இருந்து நாம் இயக்கத்ததர்ப்பற்றி அறிகிறோம்.

குறிப்பு : வட்டப்பாதையில் செல்வதற்குத் தேவையான மைய நோக்கு விசை G வழியே செயல்படவேண்டும். ஆனால், தண்டவாளங் களுக்கும் சக்கரங்களுக்கும் கிடையே உள்ள கிடைதள விசை F , BA வழியே செயல்படுகிறது. இவ்விசை G வழியே செயற்படும் ஒரு சமமான விசைக்கும், $ADCB$ என்ற திசையில் இயங்கக்கூடிய ஒரு சுழலிணைக்கும் சமம். இச் சுழலிணை உட்சக்கரத்தை (A எனும் புள்ளியை) தண்டவாளத்திலிருந்து தூக்கியிடும் வாய்ப்பைப் பெற்றிருக்கிறது.

சமனாத்தில் அமைந்த வட்டப்பாதையில் இயங்கும் கிரயில் பெட்டி கவியுக்கூடிய திசை :

சமன்பாடு (4)-ல் இருந்து,

R_2 எர்போதும் நேர் எண்ணாகவே இருக்கும், v -ன் மதிப்பு கூடக் கூட R_2 -ன் மதிப்பும் கூடும் என்று காண்கிறோம்.

R_2 எர்போதும் நேர் என்ற ஆனதால், இச் சக்கரம் (பெயிச்சக்கரம்) பாதையைவிட்டு விலக வாய்ப்பே இல்லை.

சமன்பாடு (5)-ல் இருந்து,

v -ன் மதிப்பு கூடக்கூட R_2 -ன் மதிப்புக்கு குறைவாகக் காண்கிறோம்.

$$v^2 = \frac{gr}{h} \quad \text{எனில்} \quad R_1 = 0$$

எனவே,

$$v = \sqrt{\frac{gr}{h}} \quad \text{எனில், உட்சக்கரம் தண்டவாளத்துடன்}$$

தொடர்பை மிஞ்ஞகிறதது.

$$v > \sqrt{\frac{gr}{h}} \quad \text{எனில்} \quad \left[\frac{v^2 h}{r a} > g \right]$$

R_1 எதிர் எண்ணுவிடும். ஆகவே, உட்சக்கரத்திற்கும் தண்டவாளத்திற்கும் தொடர்பு இல்லாமல் போகின்றது. ஆகவே, கிரயில் பெட்டி (வெளிச்சக்கரம், தண்டவாளத்தின்மேல் டிடியுமாறு) வெளிப்புறமாகக் கவியும் நிலையை அடைகிறது.

கிரயில் பெட்டி செல்லும் வேகம் v அதிகமாக இருக்கவேண்டுமானால், a பெரியதாகவும், h சிறியதாகவும் இருக்கவேண்டும். ஆகவே, கிரயில் பெட்டி வளைவில் வேகமாகச் செல்ல ஏற்றவாறு, புவிச்சுழியுமையத்தைக் கூடியவரை கீழேயும், தண்டவாளங்களுக்கு கிடையே உள்ள தூரத்தை கூடியவரை அதிகமாகவும் அமைக்கவேண்டும்.

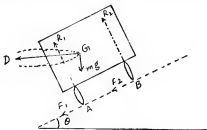
இவ்வாறு கிரயில் பெட்டியையும் செய்து, தண்டவாளங்களுக்கு கிடையே உள்ள தூரத்தையும் நிர்ணயம் செய்த பிறகு, வேகத்தை அதிகரிக்க, கூடியவரை பெரிய ஆரமுள்ள பாதையை அமைக்கவேண்டும்.

கிரயில் பெட்டியையும் கட்டி, பாதையையும் அமைத்த பிறகு, கிரயில் கவியுமல் அல் வளைவுப் பாதையில் செல்ல, வேகத்தை $\sqrt{\frac{gr}{h}}$ என்ற அளவையிடக் குறைத்தே ஓட்டவேண்டும்.

8-7. ஒரு பக்கம் உயரமாக அமைக்கப்பட்ட வட்டப்பாதை வழியே கிரயில் பெட்டியின் இயக்கம் (Banked-up track)

ஒர் கிரயில் பெட்டி சமதளத்தில் அமைக்கப்பட்ட வட்டப்பாதையில் செல்வதற்குத் தேவையான மையநோக்குவிசை, தண்டவாளங்களுக்கீழே சக்கர விளிம்புகள் செலுத்தபடுத்தும் அழுத்தம் ஆகும். திபுட்டளின் மூன்றுவது விதிப்படி சக்கர விளிம்புகள் தண்டவாளத்தை அழுத்தம் பொறுது, தண்டவாளமும் அதே விசையுடன் சக்கர விளிம்புகளை அழுத்துகின்றது. இதனால் கிரயிளுக்குக் கிடையில் மிக அதிகமாக உசர்ப்பு விசை செயற்பட்டு தான்கையில் சக்கரங்களும், தண்டவாளங்

எனும் சேதம் அடைந்துவிடுகின்றன. இதைத் தவிர்ப்பதற்காக இருப்புப் பாதையின் குறுக்குக் கட்டைகளை (sleepers) கிடைதளத்திற்குச் சரிதச் சாய்த்திருக்குமாறு அமைக்கிறார்கள். இவ்வாறு அமைப்பதன் மூலம், சக்கர விலிப்புகள் தண்டவாளங்களின்மீது எவ்வித அழுத்தத்தையும் செலுத்தாதவாறு செய்யலாம். இவ்வாறு குறுக்குக் கட்டைகளை அமைப்பதற்குத் தேவையான சாய்வு கோணத்தைப் பின் வருமாறு கணக்கிடலாம்.



படம் 85.

படத்தில் $ABCD$, பெட்டியின் புனியிடுப்பு மையம் (G), வட்டப் பாதையின் மையம் (D) ஆகியவற்றின் வழியே செல்லும் செங்குத்துத் தளவெட்டு மூகத்தைக் குறிக்கின்றது.

A, B என்ற புள்ளிகளில் பெட்டியின் உட்புற வெளிப்புறச் சக்கரங்கள் தண்டவாளத்தைத் தொட்டும் விடக்கூடாத குறிக்கின்றன.

R_1, R_2 உட்புற வெளிப்புறத் தண்டவாளங்கள் பெட்டியின் அடித்தளத்திற்குச் (AB) செங்குத்தாகச் செலுப்படுத்தும் எதிர்வினைகள்.

பெட்டியின் திணிவு m எனவும், பெட்டியின் சீரான வேகம் v எனவும், பாதையின் ஆரம் r எனவும், புனியிடுப்பு மையம் G , இருப்புப் பாதையின் தளத்தில் இருந்து h உயரத்தில் இருக்கின்றது எனவும் கொள்வோம்.

தண்டவாளங்களுக்கும், சக்கரங்களுக்கும் கிடைசெய் அழுத்தமே கிராமர் இருக்கத் தேவையான சாய்வு கோணம் θ என்போம்.

கிடைசெய்ததிலும், செங்குத்துத் திசையிலும் நிபக்கச் சமன்பாடுகளை எழுத,

$$(R_1 + R_2) \sin \theta = \frac{mv^2}{r} \quad \dots \quad (1)$$

$$(R_1 + R_2) \cos \theta = mg \quad \dots \quad (2)$$

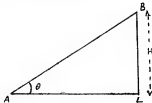
(2) ÷ (1),

$$\tan \theta = \frac{v^2}{rg} \quad \dots \quad (3)$$

எனவே, r ஆரமுடைய வட்டப்பாதையில் வழியே, பெட்டி v வேகத்துடன் இயங்கும்போது, தண்டவாளங்கள் மீது சக்கர விசைப்புகள் எய்வின அழுத்தத் தையும் செயற்படுத்தாமல் இருக்க, குறுக்குக் கட்டைகளைக் கிடைதளத்திற்கு $\tan^{-1} \frac{v^2}{rg}$ 'என்ற கோணத்தை அமைக்குமாறு பொருத்த வேண்டும்.

குறிப்பு :

1. இரு தண்டவாளங்களுக்கும் கிடைமேல் நிர்ணயிக்கப்பட்ட தூரம் AB கொடுக்கப்பட்டால், உட்புறத் தண்டவாளத்திலிருந்து, வெளிப்புறத் தண்டவாளம் இருக்கவேண்டிய உயரம் H -ஐக் கணக்கிடலாம்.



படம் 86.

$$\begin{aligned} BL &= AB \cdot \sin \theta \\ &= AB \cdot \tan \theta \quad \left(\begin{array}{l} \text{பொதுவாக } \theta \text{ சிறியது} \\ \text{ஆதலால், } \sin \theta \approx \theta = \tan \theta \end{array} \right) \\ &= AB \cdot \frac{v^2}{rg} \end{aligned}$$

$$\therefore H = AB \cdot \frac{v^2}{rg} \quad \dots \quad (4)$$

2. மிவ்வாறு கணக்கிடப்பட்டுச் சரிவாக அமைக்கப்பட்ட பாதையில், r , θ மிவற்றின் மதிப்பு நிலையானவை ஆகும். மிப்போது தண்டவாளங்களுக்கும், சக்கரங்களுக்கும் மிடையே அழுத்தமே மிவ்வாதவாறு செல்லவேண்டிய திட்டமிடப்பட்ட வேகம்,

$$V = \sqrt{rg \tan \theta} \quad \dots \quad (5)$$

3. திட்டமிடப்பட்ட வேகத்தைவிடக் குறைவான அல்லது அதிகமான வேகத்தோடு அப் பாதையில் செல்லும், சக்கரங்களுக்கும், தண்டவாளங்களுக்கும் மிடையே ஓரளவு அழுத்தம் ஏற்படவே செய்யும். BA -ன் திசையில் மிவ் வழுத்தத்தின் அளவு F எனக் கொண்டால், F -ன் மதிப்பைக் கணக்கிடமுடியும்.

அழுத்தம் மிவ்வாமல் மிப் பாதையில் செல்ல திட்டமிடப்பட்ட வேகம் V .

v என்ற மாறுபட்ட வேகத்துடன் செல்லும்போது, ஏற்படும் அழுத்தம் F என்க.

$$\tan \theta = \frac{v^2}{rg} \quad \dots \quad (6)$$

செங்குத்துத் திசையிலும், மிடையட்டத்திலும், நியூட்டன் சமன்பாடுகளை எழுத,

$$(R_1 + R_2) \cos \theta - F \sin \theta = mg \quad \dots \quad (7)$$

$$(R_1 + R_2) \sin \theta + F \cos \theta = \frac{mv^2}{r} \quad \dots \quad (8)$$

$$(8) \cdot \cos \theta - (7) \cdot \sin \theta$$

$$F = \frac{mv^2}{r} \cos \theta - mg \sin \theta$$

$$= \frac{m \cos \theta}{r} [v^2 - gr \tan \theta]$$

$$F = \frac{m \cos \theta}{r} [v^2 - V^2] \quad \dots \quad (9)$$

$$= \frac{m}{r} \frac{(v^2 - V^2)}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$$

$$= \frac{m}{r} \frac{v^2 - V^2}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{g^2}}}$$

$$= mg \frac{(v^2 - V^2)}{\sqrt{V^4 + g^2 r^2}}$$

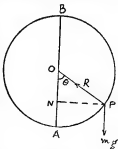
எனவே $v > V$ எனில், அதாவது உண்மையான வேகம், திட்டமிடப் பட்ட வேகத்தைவிட அதிகம் என்றால், F நேரெண்ணுதும், ஆகவே, வேளித் தண்டவாளம் சக்கர விளிம்புகளை அழுத்துகின்றது.

$v < V$ எனில், வேகம் திட்டமிடப்பட்ட வேகத்தைவிடக் குறைவு எனில், F -ன் மதிப்பு எதிர் எண்ணுதும். ஆகவே F , A, B -ன் திசையில் செயல்படும். ஆகவே உட்தண்டவாளத்திலும் சக்கர விளிம்புகளுக்கும் இடையே அழுத்தம் இருக்கும்.

சாய்வாக அமைக்கப்பட்ட பாதையில் செல்லும் மோட்டார் காரிலும் மேற்கூறியவை பொருத்தும். இந்த இயக்கத்தில், அழுத்தம் F -க்குப் பதிலாக, பாதைக்கும் சக்கரத்திற்கும் இடையே, உராய்வு விசை செயற்படும்.

8.8. கழுவும் கம்பியில் ஒரு துகளின் சார்பமைதி (Relative rest)

வட்டவடிவமான வழு வழுப் பான கம்பி ஒன்றில் ஓர் உருமணி (bead) கோக்கப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்வோம். இக் கம்பி அதன் தளத்தில் உள்ள ஒரு செங்குத் தாள் அச்சைப்பற்றிச் சுழல்கின்ற கோண வேகத்துடன் சுழற்றப் பட்டால், சுழற்றப்படும் வேகத்தைப் பொறுத்து உருமணி கம்பியின் தாழ்ந்த புள்ளியைத் தவிர, வேறு புள்ளிகளிலும் கம்பியைப் பொறுத்தவரை ஓர்விடம் இருக்கும் என நிறுவலாம்.



படம் 87.

படத்தில் O வட்டமையத்தை யும், AB என்ற விட்டம் செங்குத்து அச்சையும் குறிக்கின்றன.

ஆக $OP = r$ எனவும்

சுழம்பவேகம் ω எனவும்

உருமணியின் திணிவு m எனவும்

கொள்வோம்.

P எனும் புள்ளி, உருமணி கம்பியைப் பொறுத்தவரை ஒவ்வியில் இருக்கும் ஒரு நிலையைக் குறிக்கட்டும். $\angle POA = \theta$ என்கோம்.

PN என்ற கோடு AB -க்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்டுள்ளது. கம்பி சுழற்றப்படும்போது, உருமணி கம்பியின்மேல் இருத்துகொண்டு, கிடைதளத்தில் NB மையமாகத்தொண்ட, ஒரு வட்டத்தில் மிடங்கும். இந்த மிடக்கத்திற்குத் தேவையான மையநோக்கு விசை ($m \cdot PN \cdot \omega^2$), PN வழியே செயற்படுகிறது.

உருமணியின் மேல் செயற்படும் விசைகள் :

- (i) உருமணியின் எடை mg ; இது செங்குத்தாகக் கீழ்தோக்கிச் செயற்படுகிறது.
- (ii) உருமணி கம்பியின்மேல் இருப்பதால், கம்பிதொகுக்கும் நேர் குத்து எதிர்விசை; இது PO வழியே செயற்படுகிறது.

இந்த நேர்குத்து எதிர்விசையின் நிலைக்கூறு $R \cos \theta$ உருமணியின் எடையைச் சமீபீடு செய்கிறது. கிடைக்கூறு $R \sin \theta$ மைய நோக்கு விசையை அளிக்கிறது.

எனவே, உருமணி கம்பியைச் சார்ந்து ஒவ்வியில் இருக்க,

$$R \cos \theta = mg \quad \dots (1)$$

$$R \sin \theta = m\omega^2 PN = m\omega^2 a \sin \theta \quad \dots (2)$$

சமன்பாடு (2)-ல் இருந்து,

$$\sin \theta (R - m\omega^2 a) = 0$$

$$\therefore \sin \theta = 0$$

$$\text{அல்லது } R - m\omega^2 a = 0$$

- (i) $\sin \theta = 0$ எனில், $\theta = 0$ அல்லது π ஆக இருக்க வேண்டும்.

$\theta = 0$ எனில், கம்பியின் தாழ்த்த புள்ளியான A , உருமணியின் சார்பமைதி நிலையாகும். இங்கு $R = mg$.

$\theta = \pi$ எனில், கம்பியின் உச்சப் புள்ளியான B , உருமணியின் சார்பமைதி நிலையாகும். இங்கு $R = -mg$.

இவ்விரண்டு நிலைகளிலும் எதிர்விசை முழுவதும், உருமணியின் எடையைச் சமீபீடு செய்கிறது.

- (ii) $\sin \theta \neq 0$ எனில்,

$$R - m\omega^2 a = 0$$

$$R = m\omega^2 a$$

சமன்பாடு (1)-ல் இருந்து

$$maw^2 \cos \theta = mg$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{g}{aw^2} \quad \dots\dots(3)$$

θ-ன் மீத மதிப்பு, சாய்வாக அமைந்த ஒரு சர்ப்பணமதி நிலையின் சாய்வுக் கோணத்தைக் கொடுக்கின்றது.

θ-ன் மீத மதிப்பு, மெய்யாக இருக்கவேண்டுமென்றால்,

$$\cos \theta < 1$$

$$\frac{g}{aw^2} < 1$$

$$w > \sqrt{\frac{g}{a}} \quad \dots\dots(4)$$

எனவே, $w > \sqrt{\frac{g}{a}}$ எனில் மட்டுமே, இப்படிப்பட்ட சாய்வாக அமைந்த புள்ளி, சர்ப்பணமதி நிலையாக அமைவதற்குரியது.

மில்லாறாக, உருமாணி தாழ்த்த புள்ளியிலோ, உச்சிப்புள்ளியிலோ, அல்லது தாழ்த்த புள்ளியில் இருந்து $\cos^{-1}\left(\frac{g}{aw^2}\right)$ கோணத் தொலைவில் உள்ன ஒரு புள்ளியிலோ, கம்பியையப் பொதுத்தவரை ஒப்பில் இருக்கும். ஆனால், கடைசியில் குறிப்பிட்ட புள்ளியில் அமைப்ப வேண்டுமானால் அதன் சுழல்வேகம் $w, \sqrt{\frac{g}{a}}$ விட அதிகமாக இருத்தல் வேண்டும்.

அதாவது, சுழல்வேகம் $\sqrt{\frac{g}{a}}$ -ஐ விட அதிகமாக இருந்தால், உருமாணி A, B தவிர, Pஐப் போன்ற வேறெந்த (சாய்ந்த) நிலையிலும் சர்ப்பு அமைதியில் இருக்காது.

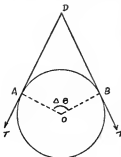
குறிப்பு :

(i) கம்பியில் தாழ்த்த புள்ளியான A-ல் உருமாணி நிலைமை நிலையிலும், (Stable equilibrium), உச்சிப்புள்ளியான B-ல் நிலையானச் சமநிலையிலும் இருக்கும்.

(ii) வட்ட வளைவான, வடிவமுள்ள சுழலும் குழாய் ஒன்றினுள் வைக்கப்பட்ட உருமணி ஒன்றின் சாற்பணைத் திசைக்கும், சுழலும் வடிவமுள்ள கோளம் ஒன்றினுள் வைக்கப்பட்டு அதனுடன் சுழலும் துளையின் சாற்பணைத் திசைக்கும் மேற்கூறிய திபத்தளைகள் பொருத்தும்.

8.3. சுழலும் சும்பியின் நியுவிசை

ஒரு வட்டவடிவக் சும்பி (அல்லது தோல்பட்டை), அதன் தளத்திலேயே, மையத்தின் வழியே தளத்திற்குச் செங்குத்தாக செல்லும் அச்சைப்பற்றிச் சுழற்றப்படுமாயின், சும்பியில் ஓர் நியுவிசை உண்டாகும். அதைக் கீழ்க்கண்டவாறு கணக்கிடலாம்.



படம் 88.

[வட்டக் சும்பி கிடைதளத்தில் அமைவதாகக் கொள்வோம். அப்போது அதன் எடைமையக் கணக்கில் எடுத்துக்கொள்ளத் தேவையில்லை.]

மையப்புள்ளி O என்க.

வட்டவடிவக் சும்பியின் AB என்ற ஒரு சிறு பகுதியைக் கருதுவோம்.

AB என்ற வட்டவட்டத்தின் நீளம் Δs என்போம்.

AB வட்ட மையத்தில் அமைக்கும் கோணம் $\Delta \theta$ என்போம்.

வட்டத்தின் ஆரம் r எனவும், சுழற்செகம் ω எனவும், ஓர் அலகு நீளக் சும்பியின் திணிவு μ எனவும் கருக்கட்டும்.

$$AB\text{-ன் திணிவு} = m. \quad \Delta s = m r \Delta \theta$$

சும்பியின் கீப்பகுதியும் ω எனும் சுழற்செகத்துடன் கிப்பக்கு வதால், அத்தகைய நியக்கத்திற்குத் தேவையான மையநோக்கு அவிசை $= (m r \Delta \theta) r \omega^2 = m r^2 \omega^2 \Delta \theta$ ஆகும்.

இந்த விசையை A, B ஆகிய புள்ளிகளில் வகையப்பட்ட DA, DB என்ற தொடுகோடுகள் வழியே செயற்படும் நியுவிசைகள் கொடுக்கின்றன. கிப்பநியுவிசைகள் ஒன்றொன்றும் T என்போம். அவற்றின் கிடைமையங்கள் கோணம் $180 - \Delta \theta$.

DO இக்கோணத்தின் சமவெட்டி.

ஆகவே DO வரம்பே இவ் விழு விசைகளின்

$$\begin{aligned}\text{தொகுப்பை} &= 2T \cos \left(90 - \frac{\Delta\theta}{2} \right) \\ &= 2T \sin \frac{\Delta\theta}{2} \\ &= 2T \frac{\Delta\theta}{2} \quad [\because \Delta\theta \text{ சிறிய மதிப்புடையது}] \\ &= T \cdot \Delta\theta\end{aligned}$$

ஆகவே,

$$T \Delta\theta = mr^2 \omega^2 \Delta\theta$$

$$\therefore T = mr^2 \omega^2$$

கம்பியின்மேல் உள்ள ஒரு புள்ளியில் வேகம் (திசைவேகம்) v எனில்

$$v = r\omega$$

$$\therefore T = mv^2$$

கம்பி தாங்கக்கூடிய உச்ச நிறுவிறை T_M எனில், கம்பி பெறக்கூடிய அதிகபட்சமான சுழல்வேகம் $\omega_M = \sqrt{\frac{T_M}{mr^2}}$

கம்பி தாங்கக்கூடிய உச்ச நிறுவிறையை, நிறுதி நிறுவை வறு (ultimate tensile strength) என்கிறோம். இதை, ஓர் அளவு குறுக்குப் பரப்பளவில் செயற்படக்கூடிய விசை இவ்வளவு என்ற அடிப்படையில் குறிப்பிடுவது வழக்கமாகும்.

கம்பியின் குறுக்குப் பரப்பளவு A , அடர்த்தி ρ , அளவு குறுக்குப் பரப்பளவில் அது தாங்கக்கூடிய நிறுதி நிறுவை வறு T_0 எனில்

$$m = \rho A$$

$$T_M = T_0 A$$

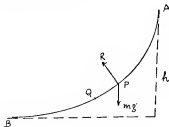
$$\therefore \omega_M = \sqrt{\frac{T_0 A}{\rho A r^2}} = \sqrt{\frac{T_0}{\rho r^2}}$$

ஆகவே கம்பியின் மீள்பெரு சுழல்வேகம்,

$$\omega_M = \sqrt{\frac{T_0}{\rho r^2}}$$

குறிப்பு: மீட்பெரு சுழல்வேகத்தில் இம் மதிப்புக் கம்பியின் குறுக்குப் பரப்பளவைச் சாத்திரிக்கவில்லை என்பது தெளிவாகிறது.

8.10. செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த ஒரு வளைவின் வழியே ஒரு துகளின் இயக்கம்



படம் 8%.

செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த ஒரு வழுவழப்பான வளைவில் ஒரு புள்ளியில் இருந்து வளைவின் வழியே கீழ்தோக்கி நழுவும் ஒரு துகளின் இயக்கத்தை இங்குக் கருதுவோம்.

வளைவின்மேல் உள்ள A என்ற புள்ளியில் u என்ற திசைவேகத் தூள் தொடங்கி வளைவின் வழியே நழுவீ B என்ற புள்ளியை அடையும்போது, அதன் திசைவேகம் v எனக்கொள்வோம். AB-க் செங்குத்து ஆளும் h எனில்,

$$v^2 = u^2 + 2gh$$

என்றாட்டலாம்.

P, எனும் புள்ளி A, B-க்கு இடையே, துகள் இருக்கும் ஒரு திசையைக் குறிக்கிறது. துகளின்மீது செயற்படும் விசைகளாவன:

(i) துகளின் எடை mg ; இது செங்குத்தாக கீழ்தோக்கிச் செயற்படும்.

(ii) வளைவின் நேர்குத்து எதிர்விசை R .

ஆற்றல் கப்பு விதியை இங்கு உபயோகிக்கலாம்.

[வளைவு வழியழிப்பானதாகையால், அது துகளினிடே செயற் படுத்தும் எதிர்விசையான R எப்போதும் துகளின் இயக்கத்திற்கு நேர்நுழைத் திசையிலேயே இருக்கும். எனவே துகளின் இயக்கத்தில், எதிர்விசை செய்யும் வேலையில் அளவு பூச்சியம். மற்றொரு விசையான புறஊர்ப்பு விசை mg , ஒரு காப்பு நிலைவிசை. எனவேதான் ஆந்தரக் காப்பு விதியை இங்கு உபயோகிக்கலாம்.]

► ஆந்தரக் காப்பு விதிப்படி,

$$\begin{aligned} \text{இயக்க ஆந்தரம் ஏற்படும் மிகுதிப்பாடு} \\ &= \text{நிலையாந்தரம் ஏற்படும் இழப்பு} \\ &= \text{வெளிவிசைகள் செய்யும் வேலை} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mu^2 = (mg)h$$

$$\therefore v^2 - u^2 = 2gh$$

$$\therefore v^2 = u^2 + 2gh \quad \dots\dots(1)$$

துணை முடிவு 1 : வளைவில்மேல் இருந்து கீழே வருவதற்குப் பதிலாக, u என்ற திசைவேகத்துடன் வளைவின் மேலே செல்லுமாறு ஏவப்பட்ட ஒரு துகள், வளைவில்மேல் செங்குத்து உயரம் h உள்ள மற்றொரு புள்ளியை அடைவதுபோது அதன் திசைவேகம் v எனில்,

$$1. \text{ இயக்க ஆந்தரம் ஏற்படும் மிகுதிப்பாடு} = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mu^2$$

$$\text{வெளிவிசை செய்யும் வேலை} = mg(-h)$$

$$\therefore \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mu^2 = -mgh$$

$$\therefore v^2 = u^2 - 2gh \quad \dots\dots(2)$$

துணை முடிவு 2 : சமன்பாடு (2)-லிருந்து, ஒரு துகள் வளைவில் மேலே செல்லச்செல்ல அதன் திசைவேகம் குறைகின்றது என்று காண்கிறோம்.

$$h = \frac{u^2}{2g} \text{ எனும்போது } v = 0$$

ஆகவே, புறப்பட்ட கிடைத்திலிருந்து $\frac{u^2}{2g}$ அளவு செங்குத்து உயரம் உள்ளவாறு, வளைவில்மேல் அமைந்துள்ள ஒரு புள்ளியைத்தான் துகள் செல்வழியும் என்று அறிகிறோம்.

மேலும், குறிப்பிட்ட தொடக்கவேகம் (u) உடைய ஒரு துகள் செல் லக்கூடிய செங்குத்து உயரம் $\left(\frac{u^2}{2g}\right)$, எந்த வளைவின்போது செல்கிறதோ

துகளின் இயக்கத்தில் எதிர்வினை செய்யும்போது பூச்சியமாகும். மேலும், துகளின் எடையான mg ஒரு காப்பு திசைவினை. ஆகவே, ஆற்றல் காப்பு விதியை உபயோகிக்கலாம்.

இயக்க ஆற்றலில் ஏற்படும் மிகுதிப்பாடு = வெளிவினை செய்யும் வேலை.

$$\therefore \frac{1}{2} [mv^2 - m \cdot 0^2] = mgh$$

$$\therefore v^2 = 2gh \quad \dots\dots(1)$$

$$\text{ஆனால், } h = AN = OA - ON$$

$$h = a - a \cos \theta$$

$$\therefore v^2 = 2ga (1 - \cos \theta) \quad \dots\dots(2)$$

துகள் வட்டத்தின்மீது இயங்குவதால், அதன் வட்ட இயக்கத் திசுத் தேவையான கம்பநோக்கு வினை (PO வழியே) = $\frac{mv^2}{a}$ இவ்விசையை PO திசையில் R , mg இவற்றின் குத்தும் பிரிவுகள் அளிக்கின்றன.

$$\therefore mg \cos \theta - R = m \frac{v^2}{a} \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

சமன்பாடுகள் (2), (3)-ல் இருத்து,

$$mg \cos \theta - R = 2mg (1 - \cos \theta)$$

$$\therefore R = mg (3 \cos \theta - 2) \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

மேலும்,

$$\cos \theta = \frac{ON}{OP} = \frac{a-h}{a}$$

$$\therefore R = mg \left[\frac{3(a-h)}{a} - 2 \right]$$

$$R = mg \left[\frac{a-3h}{a} \right] \dots \quad \dots \quad (5)$$

சமன்பாடு (2)-ல் இருத்து துகளின் திசைவேகத்தையும், சமன்பாடு (4)-ல் இருத்து எதிர்வினையையும் கணக்கிடலாம்.

θ -ன் மதிப்பு அதிகமாகும்போது, $\cos \theta$ -ன் மதிப்பு குறைகின்றது. ஆகவே, v -ன் மதிப்பு அதிகமாகிக்கொண்டே செல்கிறது.

R -ன் மதிப்பு குறைந்துகொண்டே செல்லும். R -ன் மதிப்பைச் சமன்பாடு (5)-ல் இருத்தும் காணலாம். R -ன் மதிப்பு தேர் எண்ணுக்க உள்வயரை, துகள் வட்டத்தின்மேல் படித்து இருக்கும். எனவே, துகள் வட்டத்தின்மேல் மியக்க,

$$a - 3h > 0$$

$$h < \frac{a}{3}$$

$h = \frac{a}{3}$ எனில், R -ன் மதிப்பு பூச்சியமாகும். அதற்குப் பிறகு R -ன் மதிப்பு தேரெண்ணாகிறது. எனவே,

$$\boxed{h = \frac{a}{3}}$$

அதாவது, உச்சிப்புள்ளியில் இருந்து அதன் ஆளும் $\frac{a}{3}$, எனும் திசையில், துகள் வட்டத்தைவிட்டு விலகிச் செல்கிறது. இதற்குப் பிறகு அது ஒரு ஏவுபொருளாக மியக்கி, ஒரு பரவளைவுப் பாதையில் செல்கிறது.

துகள் வட்டத்தைவிட்டு விலகும்போது,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{a-h}{a} \\ &= \frac{a - \frac{a}{3}}{a} \end{aligned}$$

$$\boxed{\cos \theta = \frac{2}{3}}$$

இதைச் சமன்பாடு (4)-ல் இருத்தும் காணலாம்.

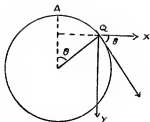
வட்டத்தை விட்டு விலகிய துகள்,

$$v^2 = 2gh = 2g \frac{a}{3}$$

$$v = \sqrt{\frac{2ag}{3}}$$

எனும் திசையேகத்துடன் ஏவப்பட்ட ஒர் ஏவு துகளாக மியக்கும்.

தூண் முடிவு : மிவ்வாறு வட்டத்தைவிட்டு விலகி ஏவு துகளாக மியக்கும் துகள் செல்லும் பரவளைவின் செவ்வகத்தைக் காண்போம்.



படம் 91.

வட்டத்தை விட்டு துக் விவகித் செல்லும் புள்ளியை (எறிதரணம்) ஆதிவாகத் கொள்வோம். அதன் வழியே செல்லும் கிடைகோட்டை க-அச்சாகவும், அப்புள்ளியிலே கீழ்தோக்கி வரையப்பட்ட செங்குத்துத் கோட்டை y-அச்சு-ஆகவும் கொள்வோம்.

$$\text{திசைவேகம்} = \sqrt{2gx}$$

$$\text{எறிசொணல் } \theta = \cos^{-1} (i)$$

பாதையின் சமன்பாடு,

$$y = x \tan \theta - \frac{(-g)x^2}{2v^2 \cos^2 \theta}$$

[y அச்சு கீழ்தோக்கி இருப்பதால், -g என்று கொண்டுள்ளோம்.]

$$y = x \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{gx^2}{2 \cdot \frac{5}{4}g \cdot \frac{5}{4}}$$

$$y = \frac{\sqrt{5}}{2}x + \frac{27}{16a}x^2$$

இது $\frac{16a}{27}$ இல் செல்லவழக்கத் கொண்ட பரவளகவக குறிக்சின்றது.

8-12. செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த வட்டத்தில் இயங்குமளது தொங்கவிடப்பட்ட ஒரு துகலின் இயக்கம்.

m என்ற திவரிமையுடைய ஒரு துகல், O என்ற ஒரு நிலையான புள்ளியில் இருத்து, l நீளமுள்ள ஓர் கிறுபடத மெல்லிய தூவல் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. துகல் அதன் தொடக்கநிலையான A-ல்

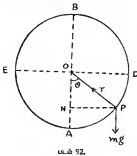
கிடைத்து, u எனும் திசையோடு துண்டி ஏலப்பட்டு, O இல் மையமாகக் கொண்டு செங்குத்துத்தளத்தில் அமைந்த ஒரு வட்டத்தில் கியூக்ஸிபம் கிடைத்து. இந்த கியூக்ஸிபின்போது எந்தவொரு கணத்திலும், துகளின் திசையோடு, தூவின் கியூக்ஸிபின் கியூக்ஸிபின் கணத்தின் மூலம், துகள்,

(i) தொடர்ந்து வட்டத்தில் சுற்றி வருவதற்கும்

(ii) அலைகியூக்ஸிபின் மெற்கொள்வதற்கும்

(iii) வட்டத்தில் கிடைத்து கியூக்ஸிபின் செல்லும்

உயிர் திபத்தின்கொள் பெறலாம்.



துகள் P என்ற நிலையில் கிடைக்கும் கணத்திற்குக் கருதுவோம். P -ல் துகளின் திசையோடு v எனவும், A -ல் கிடைத்து அதன் உயரம் h எனவும் கொள்வோம். படத்தில்,

$$AN = h$$

$$OP = l$$

$$\angle AOP = \theta$$

துகளின் மீது செயற்படும் விசைகள்

(i) திடுதோக்கிச் செயல்படும் துகளின் எடை mg

(ii) தூவின் கியூக்ஸிபின் T (PO வழியே)

துகளின் மீது செயற்படும் தூவின் கியூக்ஸிபின், துகளின் கியூக்ஸிபின் எய்தித் வேலையும் செய்வதில்லை. புவிசீர்ப்பு விசையான mg ஒரு கிடைப்பு நிலையாக. எனவே, ஆற்றல் கிடைப்பு விதியை உபயோகிக்கலாம்.

கியூக்ஸிபின் ஆற்றலின் ஏற்படும் கிடைப்பாடு = வெளியிசை செய்யும் வேலை

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2 = -mgh$$

$$\therefore v^2 - u^2 = -2gh$$

$$v^2 = u^2 - 2gh$$

$$\dots \dots \dots (1)$$

PO வழியே, துகளின் வட்ட இயக்கத்திற்குத் தேவையான மைய நோக்கு விசையை அளக்கும், T, mg இயற்றின் குத்துப் பிரிவுகள் $= T - mg \cos \theta$.

$$\therefore T - mg \cos \theta = \frac{mv^2}{l}$$

$$T = \frac{mv^2}{l} + mg \cos \theta$$

$$= \frac{mv^2}{l} + mg \left(\frac{l-h}{l} \right)$$

$$= \frac{m}{l} \left[(u^2 - 2gh) + g(l-h) \right]$$

$$\therefore T = \frac{m}{l} \left[u^2 + g(l-3h) \right] \quad \dots \dots (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2) மூன்றையே, P -ல் துகளின் திசைவேகத்தை யும், துகளின் இழுவைசையையும் கொடுக்கின்றன.

துகள் வட்டத்தில் மேலே செல்லச் செல்ல, h -ன் மதிப்பு அதிகமாகிக் கொண்டே போகிறது. h அதிகமாக ஆக, திசைவேகமும், இழுவைகளும் மதிப்பில் குறைந்துகொண்டே செல்கின்றன. B -ல் அவை நிரண்டும் அவற்றின் மீச்சிறு மதிப்பை அடைகின்றன. B -ல் திசைவேகத்தை v_B எனவும், இழுவைசையை T_B எனவும் குறிப்பிட்டால், $h = 2l$ எனப் பிரதியிட,

$$v_B^2 = u^2 - 4gl \quad \dots \dots (3)$$

$$T_B = \frac{m}{l} (u^2 - 5gl) \quad \dots \dots (4)$$

(1) துகள் தொடர்ந்து வட்டத்தில் சுற்றி வருவதற்குரிய நிபந்தனை

துகள் தொடர்ந்து வட்டத்தில் சுற்றியவு, அதன் திசைவேகமும், இழுவைகளும் வட்டத்தின் எந்தப் புள்ளியிலும் பூச்சியமாகக் கூடாது. அதாவது அவற்றின் மதிப்புகள் வட்டத்தின் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் நேர் எண்ணாக இருக்கவேண்டும். அவற்றின் மீச்சிறு மதிப்புக்களான v_B, T_B நிரண்டும் நேர்க்குறி உடையதாக இருக்கவேண்டும்.

$$v_B > 0 \text{ இருக்க } u^2 > 4gl \text{ எனவும்,}$$

$$T_B > 0 \text{ இருக்க } u^2 > 5gl \text{ எனவும்,}$$

இருக்க வேண்டும்.

$u^2 > 5gl$ எனில், T_B , v_B கிடைக்கும் தேர்ச்சுறுதி உடையவைகளாக இருக்கும். ஆகவே, துகள் தொடர்ந்து வட்டத்தில் சுற்றிவரும்.

$u^2 = 5gl$ எனில், $T_B = 0$. ஆனாலும் $v_B > 0$. ஆகவே, துகள் தொடர்ந்து வட்டத்தில் சுழியாகச் சுற்றிவரும்.

(ii) துகள் அலைவு இயக்கம் (Oscillation) பெறுவதற்குரிய நிபந்தனை

துகளின் திசைவேகம் பூச்சியமாகி, கிழுவின் தேர்ச்சுறுதி உடையதாகவே இருக்கும் நிலையில், துகள் ஒரு கணம் ஓய்வநிலை எய்தி பாதையில் திரும்பி நழுவ்வதால், துகள் அலைவு இயக்கம் பெறும்.

அதாவது துகளின் கிழுவின் பூச்சியமாகும் முன்பே, திசைவேகம் பூச்சியமாகின், துகள் அலைவியக்கம் பெறுகிறது.

திசைவேகம் பூச்சியமாகும் போது, உயரம் h_1 எனில்

$$h_1 = \frac{u^2}{2g} \quad (\text{சமன்பாடு 1-ல் இருந்து})$$

துகளின் கிழுவின் பூச்சியமாகும் போது, உயரம் h_2 எனில்

$$h_2 = \frac{u^2 + gl}{3g} \quad (\text{சமன்பாடு 2-ல் இருந்து})$$

துகள் அலைவியக்கம் பெறவேண்டுமாயின்

$$h_1 < h_2$$

$$\text{அதாவது} \quad \frac{u^2}{2g} < \frac{u^2 + gl}{3g}$$

$$\text{அல்லது} \quad 3u^2 < 2u^2 + 2gl$$

$$\text{அதாவது} \quad u^2 < 2gl$$

$$\text{மேலும்} \quad u^2 < 2gl \text{ எனில் } h_1 < l$$

ஆகவே, $u^2 < 2gl$ எனில் துகளின் திசைவேகம், OD-க்கு கீழேயே உள்ள ஒரு புள்ளியில் பூச்சியமாகிவிடுகின்றது. அந்நிலையில் கிழுவின் தேர்ச்சுறுதி உடையதாகவே உள்ளது. ஆகவே, துகள் வட்டத்தையவிட்டு விடுவதால் h_1 உயரம் ($< l$) வரை சென்று, கண நேரம் ஓய்வநிலைத் திரும்ப நழுவி, அலைவியக்கம் பெறுகிறது. இந்த அலைவியக்கம், தொடக்க நிலையான Aஐ மையமாகக்கொண்டு, அதை வட்டத்தையவிட்டு சிதறுதலான வட்டவிக்வின வீது ஏற்படுகிறது.

$$u^2 = 2gl \text{ எனில்,}$$

$$h_1 = h_2 = l.$$

O-ல் கிடைக்கத்தக்க உள்ள D எனும் புள்ளியில் திசைவேகம், கிழுவின் கிழுவின் பூச்சியமாகின்றன. கிழுவின் தேர்ச்சுறுதி

உடையதாக ஆகாததாக துகள் இந்த நிலையிலும் வட்டத்தைவிட்டுச் செல்வதில்லை. ஆகவே D வரை சென்று, ஒரு கணம் ஓய்வு நிலை எய்தி, திரும்பி நழுவாதாக, அஃலவு மிகைம் பெறுகின்றது. மிகு அஃலவு மிகைத்தின் பாதை D -ல் இருத்து, E -வரை உள்ள அரைவட்டமாக அமைகிறது.

(iii) வட்டத்தில் இருந்து விலகிச் செல்வ நிபந்தனை

தாவின் நிறுவனச் பூச்சியமாகியும், திசைவேகம் நேர்த்துவி உடையதாகவே இருக்கும் நிலையில், துகள் வட்டப்பாதையை விட்டு விலகிச் செல்கிறது.

அதாவது, திசைவேகம் மறையும்முன்பே, நிறுவனச் பூச்சியமாகிய துகள் வட்டப்பாதையை விட்டு விலகுகிறது.

எனவே, துகள் வட்டப் பாதையை விட்டு விலகிச் செல்ல,

$$\begin{aligned} h_1 &> h_2 \\ \text{அதாவது } \frac{u^2}{2g} &> \frac{u^2 + gl}{3g} \\ 3u^2 &> 2u^2 + 2gl \\ u^2 &> 2gl. \end{aligned}$$

ஏதெனவே $u^2 > 5gl$ எனில், துகள் வட்டப்பாதையில் கற்றிக் கொண்டே இருக்கும் எனக் கண்டோம்.

ஆகவே $u^2 > 2gl$ ஆகவும், $< 5gl$ ஆகவும் இருப்பின், துகள் வட்டத்தின்மேல் இருந்து விலகிச் செல்கிறது.

துகள் விலகிச் செல்லும் புள்ளி O -ன் வழியே செல்லும் கிடைமட்டத் திசை நேரேதான் இருக்கும் எனக் காட்டலாம்.

$$\begin{aligned} \text{கவித்தின் நிறுவனச் பூச்சியமாகும் போது} \quad \left| \frac{u^2 + gl}{\text{உயரம் } h_2} \right| &= \frac{u^2 + gl}{3g} \\ u^2 &> 2gl \\ \therefore h_2 &> l \end{aligned}$$

எனவே $2gl < u^2 < 5gl$ எனில், துகள் O -ன் வட்டத்தில் உள்ள D -க்கு மேலும், உச்சிப்புள்ளியான B -க்குக் கீழும் கிடைவில், ஏதோ வொரு புள்ளியில் நிறுவனையை நிறுக்கின்றது. அப்போது துகள் மூலக்கை நிறுத்துவதற்கு. ஆகவே, துகள் வட்டப்பாதையை விட்டு விலகி, ஓர் எறிப்பொருளைப் போல் மிதக்கி, பரவலாகவுப் பாதையில் செல்கிறது.

எனவே,

- (i) $u^2 > 5g$ எனில், துகள் வட்டத்தைச் சுற்றிவருகிறது.
- (ii) $2g < u^2 < 5g$ எனில், துகள் வட்டப்பாதையை விட்டு விளகுகிறது.
- (iii) $u^2 < 2g$ எனில், துகள் அமைய மியக்கம் பெறுகிறது.

குறிப்பு 1: $h = 0$ எனில், மிழுவிகையில் உச்சமதிப்பைப் பெறுகிறோம். A -ல் துகள் மிழுவிகை அதன் உச்சமதிப்பைப் பெற்றிருக்கிறது.

$$(3)\text{-ல் மிகுந்து, உச்சமதிப்பு (மீர்ப்பெறு மதிப்பு)} = \frac{m}{l} [u^2 + g l]$$

துகள் வட்டத்தை முழுமையாகச் சுற்றிவர, $u^2 > 5g$

$$\therefore \text{மிழுவிகையில் உச்சமதிப்பு} > \frac{m}{l} (5g + gl) \\ > 6 mg$$

ஆகவே துகள் வட்டத்தில் சுற்றிவர, மிழுவிகையின் உச்சமதிப்பு, குறைந்தது $6 mg$. அதாவது துகளின் எடைமையப்போல் ஆறு மடங்கு. எனவே துகள் வட்டத்தில் சுற்றிவர, துகள் குறைந்தது துகளின் எடைமையப்போல் ஆறு மடங்கு எடைமையத் தாங்கும் அளவாவது பலம் பொருத்தியதாக மிகுக்கவேண்டும்.

குறிப்பு 2: வழவழப்பான செக்குத்து வட்டவளையம் ஒன்றின் உட்புறத்தில், மேல்நோக்கி ஏவப்படும் ஒரு துகளுக்கும் மேற்கூறிய நிபந்தனைகள் பொருத்தம். ஆனால், இங்குக் கயிற்றின் மிழுவிகைக்குப் பதிலாக, PO வழியே வளைவத்தின் அழுத்தம் செயற்படும்.

குறிப்பு 3: வழவழப்பான வட்டக்குழாய்க்குள் மிளக்குமாறு அமைக்கப்பட்ட துகளுக்கும், வழவழப்பான வளைவத்தில் கோக்கப்பட்ட உருமணிக்கும் அவற்றையிட்டுச் செல்லும் வாய்ப்புக் கிடையாது. ஆகவே, அவை ஒன்று முழுச்சுற்றுச் சுற்றி வரவேண்டும்; அம்மது அமைய மியக்கம் பெறவேண்டும்.

துகளின்மேல் செயற்படும் அழுத்தம் நேர் எண்ணாகவோ, எதிர் எண்ணாகவோ இருக்கலாம். ஆகவே முழுச்சுற்றுவர $u^2 > 0$ போதும். எனவே $u^2 > 4g$ எனில் B -ல் திசைவேகம் நேர் எண்ணாகவே இருக்கும். ஆகவே முழுச் சுற்றும் சுற்றிவர முடியும்.

எனவே,

- (i) $u^2 > 4g$ எனில், துகள் முழுச் சுற்றும் சுற்றிவரும்.

(ii) $2r < u^2 < 4r$ எனில், துகள் அரைவட்டத்தைவிடப் பெரிய விகிதில் அகிலவு இயக்கம் பெறுகிறது.

(iii) $u^2 < 2r$ எனில், துகள் வட்டத்தின் கீழ்ப்பகுதியில் அகிலவு இயக்கம் பெறுகிறது.

மாதிரிக் கணக்குகள்

1. 64 டன் திணிவு உட்கள் ஒர் இரயில் வண்டி 880 அடி ஆரமுள்ள ஒரு வட்டப் பாதையில் மணிக்கு 60 மைல் வேகத்தில் சென்றுகிறது. வட்ட மையத்தை நோக்கி தண்டவாளங்களின் அழுத்தம் எவ்வளவு எனக் கணக்கிடு.

$$\text{வேகம்} = 60 \text{ மை/மணி} = 60 \times \frac{22}{15} = 88 \text{ அடி/வி.}$$

வட்ட மையத்தை நோக்கிச் செயற்படும் விசை

$$\begin{aligned} &= \frac{mv^2}{r} \\ &= \frac{64 \times 2240 \times 88 \times 88}{880} \text{ பவுண்ட்} \\ &= \frac{64 \times 2240 \times 88 \times 88}{880 \times 32 \times 2240} \text{ டன் எடை} \\ &= 17.6 \text{ டன் எடை} \end{aligned}$$

2. கிடைதளத்தில் ஒரு புக்கிலில் சுட்டப்பட்ட 40 செ.மீ. நீளமுள்ள தூவின் மறுமுனையில் 245 கிராம் திணிவுள்ள ஒரு துகள் சுட்டப் பட்டு, கிடைதள மட்டத்தில் விநாடிக்கு 5 முறை வட்டப் பாதையில் சுற்றிவருகிறது. துகளின் குத்து முடுக்கத்தையும், தூவின் இழு விசையையும் கண்டுபிடி.

$$T = 40 \text{ செ.மீ.}$$

$$\begin{aligned} w &= \text{கோணவேகம்} = \text{விநாடிக்கு 5 சுற்றுகள்} \\ &= 5 \times 2\pi = 10\pi \\ &= \text{விநாடிக்கு } 10\pi \text{ ஆரையங்கள்} \\ \text{வேகம் } v &= rw \\ &= 40 \times 10\pi = 400\pi \text{ செ.மீ./வி.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{குத்து முடுக்கம்} &= \frac{v^2}{r} \\ &= \frac{400\pi \times 400\pi}{40} = 4000\pi^2 \text{ செ.மீ./வி}^2. \end{aligned}$$

மிருகை T டைக்கள் எனில், கிடைக்கத்தக்க தகவல்களைப்
செய்கிறோம் வினா வினா ஒன்று கட்டுமே ஆகலாம்

$$\begin{aligned} T &= \frac{mv^2}{r} = 245 \times 4000 \pi^2 \\ &= 980000 \pi^2 \text{ டைக்கள்} \\ &= 1000 \pi^2 \text{ கிராம் டைக்கள்} \end{aligned}$$

3. 0.90×10^{-20} கி.கி. திணிவுள்ள ஒரு எலக்ட்ரான், ஒரு கார்ப்
வினாவின் சக்தியாக, 20 செ.மீ. ஆரமுள்ள வட்டத்தில் 3.0×10^4 மீ/வி
எனும் வேகத்துடன் சுற்றுகிறது. 1.6×10^{-27} கி.கி. திணிவுள்ள ஒரு
புரோட்டான் அது அதே வினாவின்மீது, அதே ஆரமுள்ள வட்டத்தில்
என்ன வேகத்தில் சுற்றி வரும்?

திணிவு m , வட்டத்தில் சீரான வேகம் v , ஆரம் r , F மைய நோக்கு
வினா எனில்,

$$F = m \frac{v^2}{r}$$

எலக்ட்ரான் அனுவிற்று,

$$F = \frac{0.90 \times 10^{-20} \times 9.0 \times 10^{12}}{0.02} \text{ நியூட்டன்கள்}$$

புரோட்டான் அனுவின்ற வேகம் V எனில்,

$$F = \frac{1.6 \times 10^{-27} \times V^2}{0.02} \text{ நியூட்டன்கள்}$$

$$\therefore \frac{1.6 \times 10^{-27} \times V^2}{0.02} = \frac{0.90 \times 10^{-20} \times 9}{0.02}$$

$$\therefore V^2 = \frac{0.90 \times 9 \times 10^9}{1.6}$$

$$\therefore V = 7.2 \times 10^4 \text{ மீ/வி.}$$

4. 8 அவுன்சு எடையுள்ள ஒரு கயிறு 12 பவுன் எடையால் சுற்றித் தாங்க
முடியும் (can just sustain a weight of 12 lbs). அதன் ஒரு
முனையில் இணைக்கப்பட்டுள்ள மூன்று பவுண்ட் திணிவுடைய ஒரு
துகை, வரலாற்றுபரான கிடைதள மேசையின்மீது, கயிற்றின் மற்ற
முனையைப்பற்றி, கயிறு அறுபடாமல் சுழலக்கூடிய உச்ச வேகம் என்ன?

துகையின் உச்ச வேகம் V என்க.

$$\text{துகையின் செங்குத்து மூடுக்கம்} = \frac{V^2}{r} \text{ (மூடுக்கம் } g)$$

காந்தின் உச்ச இழுவிலை = மைய நோக்கு விசை

$$T = ma$$

$$= 3 \times \frac{V^2}{6} \text{ பவுண்டுகள்}$$

$$\text{ஆனால் } T = 12 \times 32 \text{ பவுண்டுகள்}$$

$$\therefore 3 \times \frac{V^2}{6} = 12 \times 32$$

$$\therefore V = 32 \text{ மீ/வி.}$$

5. ஒரு துகள் வட்ட வடிவாக அமைந்துள்ள மேசையின் மையத்திலிருந்து 49 செ.மீ. தூரத்தில் இருக்கிறது. மேசை மையப் புள்ளி வழியே நிலைமட்டத்தைப்பற்றி, சிறுச் சிறுச் சுழற்சிகளுமூலம் உட்குவிக்கப்படுகிறது. துகள் நகரும் நிலையில் இருக்கும்போது, அதன் கோணவேகம் என்ன? $\mu = 0.2$.

நிலைமட்டத் திசையில், துருக்கு இயக்கம் இல்லாததால்,

$$R = mg$$

துகள் நகரும் தருவாயில்

$$\text{உராய்வு விசை} = \mu R = 0.2 mg.$$

இவ் விசைதான் வட்டப் பாதையில் செல்ல வேண்டிய, மைய நோக்கு விசையை அளிக்கிறது.

$$\therefore \mu \cdot mg = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r \quad [\omega \text{ கோணவேகம்}]$$

$$\omega^2 = \frac{2g}{r} = \frac{2 \times 980}{49} = 4$$

$$\omega = 2 \text{ ரேடியன்கள்/விநாடி}$$

6. இரு சம திணிவுள்ள துகள்கள் ஒரு தூரின் முனைகள் ஒவ்வொன்றிலும், ஒவ்வொன்றுக் கட்டப்பட்டுள்ளன. தூர மேசை யின்மேல் உள்ள துகளத்தின் வழியாகச் சென்று ஒரு துகள் மேசையின் மேலும், மற்றது மேசையின் கீழும் உட்குவாது அமைக்கப்பட்டுள்ளன. மேசையின்மேல் உள்ள துகள் 9.8 செ.மீ. ஆரமுள்ள ஒரு வட்டப் பாதையில் நிலைத்திருந்து எவ்வளவு முறை சுற்றினும், தொங்கிக்கொண்டிருக்கும் துகள் ஒய்வுநிலையில் இருக்கும்?

தூரின் இழுவிலை T இரு பகுதிகளிலும் ஒன்றுதான் இருக்கும். துகள்களின் திணிவு m எனில், பிரண்டாவது துகள் ஒய்வுநிலையில் இருக்க,

$$T = mg.$$

இதே அளவு மிகுவிசைநாள், முறக் துகள் வட்டப் பாதையில் செல்ல நியதும் மைய நோக்கு விசையை அளிக்கிறது.

விநாடிக்கு n முறை சுற்றுவதற்குக் கோண்டால்,
கோணவேகம் $\omega = 2\pi n$ ரேடியன்/வி.

$$\therefore \text{மைய நோக்கு விசை} = m\omega^2 r$$

$$= m \cdot 4\pi^2 n^2 \times 9 \cdot 8$$

$$\therefore T = m \cdot 4\pi^2 n^2 \cdot 9 \cdot 8$$

$$\therefore mg = m \cdot 4\pi^2 n^2 \cdot 9 \cdot 8$$

$$\therefore n^2 = \frac{980}{4\pi^2 (9 \cdot 8)} = \frac{25}{\pi^2}$$

$$\therefore n = \frac{5}{\pi}$$

$$\therefore 1 \text{ நிமிடத்தில் சுற்று எண்ணிக்கை} = \frac{300}{\pi}$$

7. ஒரு துகள் சீரான சுழர்வேக முடுக்கம் α மிகுக்குமாறு, r ஆரமுள்ள ஒரு வட்டப்பாதையில் நியங்கிறது. ஓய்வில் இருந்து புறப்பட்ட அத்துகள் n சுற்றுகளுக்குப் பிறகு, மையத்தை நோக்கி f அளவு முடுக்கம் உடையதாக இருந்தால் $f = 4\pi^2 n \alpha$ எனக் காட்டு.

[B.Sc. Sept. 67]

t நேர முடியில் துகள் சுற்றியந்த கோணம் θ எனில்

$$\text{கோண வேகம்} = \dot{\theta}$$

$$\text{சுழர்வேக முடுக்கம்} = \ddot{\theta} \quad (\text{கோண முடுக்கம்})$$

$$\ddot{\theta} = \alpha \quad (\text{கொடுக்கப்பட்டது})$$

$$\therefore \dot{\theta} = \alpha t + A$$

துகள் ஓய்வில் இருந்து புறப்பட்டது.

$$\therefore t = 0 \text{ எனும்போது } \dot{\theta} = 0$$

$$\text{ஆகவே } 0 = \alpha(0) + A$$

$$\therefore A = 0$$

$$\dot{\theta} = \alpha t \quad \therefore \dots \quad (1)$$

$$\therefore \theta = \alpha \frac{t^2}{2} + B$$

$$t = 0 \text{ எனும்போது } \theta = 0$$

$$\therefore B = 0$$

$$\therefore \theta = \alpha \frac{t^2}{2} \quad \dots \quad (2)$$

n சுற்றுகளுக்குப் பிறகு $\theta = 2\pi n$

$$\therefore \frac{1}{2} \alpha t^2 = 2\pi n$$

$$t^2 = \frac{4\pi n}{\alpha} \quad \dots \quad (3)$$

$$\text{சமவத்த தோக்கி முடுக்கம்} = \frac{v^2}{r} = r \dot{\theta}^2$$

$$= r \alpha^2 t^2 \quad (1)\text{-ல் இருந்து}$$

$$= r \alpha^2 \frac{4\pi n}{\alpha} \quad (3)\text{-ல் இருந்து}$$

$$= 4\pi r n \alpha$$

$$\therefore f = 4\pi r n \alpha$$

8. m என்ற திணிவு உடைய ஒரு துகள் வழவழப்பான கிடை தள மேசையிலிருந்து h உயரத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து l திள முடைய ஒரு தூலாகத் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. துகள் மேசையின் மீது ஒரு வட்டத்தில் விதாங்கு n முறை சுற்றுகிறது செய்யப்படுகிறது. துகள் மேசையிலே சுற்றுவதற்குரிய n -ன் உச்ச மதிப்பு என்ன?

மேசையின்மீது துகள் இருப்பதால், துகளின்மீது செங்குத்துத் திசையில் செயற்படும் எதிர்விசை R என்க.

கோணவேகம் ω எனில்,

செங்குத்துத் திசையில்,

$$R + T \cos \theta = mg \quad \dots \quad (1)$$

கிடைமட்டத் திசையில்,

$$T \sin \theta = m l \sin \theta \cdot \omega^2 \quad \dots \quad (2)$$

$$\therefore T = m \omega^2 l \quad (\because \sin \theta \neq 0)$$

சமன்பாடு (1)-ல் இருந்து

$$R = mg - T \cos \theta$$

$$= mg - m \omega^2 l \cos \theta$$

$$= mg - m (4\pi^2 n^2 l) \cos \theta \quad (\because \omega = 2\pi n)$$

$$= mg - 4m\pi^2 n^2 l$$

துகள் மேசையிலே இருக்கவேண்டும் எனில், R எதிர்ச் குறியுடைய தானமல் இருக்கவேண்டும்.

$$\text{அதாவது } mg - 4\pi^2 n^2 h > 0$$

$$n^2 < \frac{g}{4\pi^2 h}$$

$$\therefore n\text{-ன் உச்ச மதிப்பு} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{h}}$$

9. ஒரு கூம்பு ஊசலின் 50 செ.மீ. நீளமுள்ள தூலின் முனையில் 500 கிராம் திணிவுள்ள குண்டு கட்டப்பட்டுள்ளது. தூல் தாங்கக்கூடிய அதிகபட்ச இழுவிசை 4 கி.கி. எடை எனில், ஊசல் ஒரு விநாடியில் அதிசயட்சம் எவ்வளவு முறை அதிவரும் எனக் கணக்கிடு. [$g = 9.8$ எனக் கொள்ளு.]

ஒரு விநாடியில் அதிசயட்சம் n தடவை அதிவதற்குக் கொண்டால்,

$$y = 2\pi n$$

$$T \sin \theta = mry^2$$

$$= m l \sin \theta 4\pi^2 n^2$$

$$\therefore T = 500 \times 50 \times 4 \times 9.8 \times n^2$$

ஆனால் கயிற்றின் உச்ச இழுவிசை

$$T = 4 \text{ கி.கி. எடை}$$

$$= 4000 \times 980 \text{ டைன்கள்}$$

$$\therefore 500 \times 50 \times 4 \times 9.8 \times n^2 = 4000 \times 980$$

$$\therefore n^2 = 4$$

$$\therefore \text{அதிசயட்ச கழற்சி எண்ணிக்கை} = 2$$

10. 15 அங். நீளமுள்ள தூல் ஒன்றுக் கிணக்கப்பட்ட ஒரு தூசு கூம்பு ஊசலாகக் கயிறுகிறது. 'தூசு செங்குத்து நிலைபுடன் அமைக்கும் கோணம் 60° எனில், தூசு 10 விநாடிகளில் ஏறக்குறைய 11 முறை அதிவரும் எனக் காட்டுக. [Sept. 68]

கூம்பு ஊசலின்,

தூலின் நீளம் l எனவும்,

இழுவிசை T எனவும்,

தூசின் திணிவு m எனவும்,

ஊசலின் ஆரம் r எனவும்,

செங்குத்து நிலைபுடன் அமைக்கும் கோணம் θ எனவும் கொண்டால்,

$$T \cos \theta = mg$$

$$T \sin \theta = mry^2$$

$$= ml \sin \theta y^2$$

$$\therefore T = mly^2$$

எனவே,

$$\frac{1}{\cos \theta} = \frac{l\omega^2}{g}$$

$$\therefore \omega^2 = \frac{g}{l \cos \theta}$$

$$\text{ஊசலின் சுழற்சி நேரம்} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \theta}{g}}$$

$$\text{இங்கு } l = 16'' = \frac{4}{3}'; \quad \theta = 60^\circ; \quad g = 32$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{சுழற்சி நேரம்} &= 2\pi \sqrt{\frac{\frac{4}{3} \times \frac{1}{2}}{32}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{48}} \\ &= \frac{11\sqrt{3}}{21} \text{ விநாடிகள்} \end{aligned}$$

$$1 \text{ விநாடிகில் சுழற்சி எண்ணிக்கை} = \frac{21}{11\sqrt{3}}$$

$$10 \text{ விநாடிகளில் சுழற்சி எண்ணிக்கை} = \frac{210}{11\sqrt{3}} = 11 \text{ (கமாராக)}$$

11. l நீளமுள்ள தூசி ஒன்றும் இணைக்கப்பட்ட ஒரு துகள் கூம்பு ஊசலாக, விநாடிக்கு n சுற்றுகள் சுற்றியிருக்கிறது. தூசியின் இழுவியையும், செங்குத்து நிலையுடன் அமைக்கும் கோணமும் மாறுதலாக, தூசியின் நீளம் x அளவு குறைக்கப்பட்டால், சுழற்சி எண்ணிக்கை கமாராக $\frac{n\pi}{2l}$ அளவு கூடும் எனக் காட்டு.

$$\text{ஊசலின் சுழற்சி நேரம்} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \theta}{g}}$$

$$\therefore \frac{1}{n} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \theta}{g}} \quad \dots\dots(1)$$

நீளம் $(l-x)$ எனும்போது சுழற்சி எண்ணிக்கை n_1 என்போம்

$$\frac{1}{n_1} = 2\pi \sqrt{\frac{(l-x) \cos \theta}{g}} \quad \dots\dots(2)$$

(1)ஐ, (2)-ஆக வகுக்க

$$\frac{n_1}{n} = \sqrt{\frac{l}{l-x}} = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{x}{l}}}$$

$$= \left(1 - \frac{\pi}{l}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{\pi}{2l} \text{ (கூமாரச்)}.$$

$$\therefore n_1 = n \left[1 + \frac{\pi}{2l}\right]$$

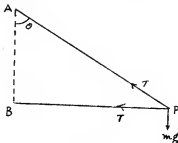
$$\therefore n_1 - n = \frac{n\pi}{2l}$$

$n_1 - n$ சுழற்சி எண்ணிக்கையில் கூடுதலைக் குறிக்கிறது. ஆகவே, சுழற்சி எண்ணிக்கை கூமாரச் $\frac{n\pi}{2l}$ அளவு கூடும்.

12. l நீளமுள்ள ஒரு தூலில் இரு முனைகளும், செங்குத்துத் தளத்தில் அமைத்துள்ள ஒரு கோட்டில்மேல் உள்ள A , B என்ற புள்ளிகளில் கட்டப்பட்டுள்ளன. AB -க்கு இடையே உள்ள தூரம் a . தூலின் மேல் உள்ள P எனும் ஹெழுவப்பான உருமணி ஒன்று, B -ஐப் பற்றி, BP இடைதளத்தில் அமைபுமாறு சீராகச் சுழலுகிறது. அதன் கோணவேகம்

$$l \left[\frac{2g}{a(l^2 - a^2)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

எனவும், உருமணி A -ஐ விட B இடம் $\frac{a^2}{l}$ அளவு பக்கத்திலும் அமைபும் எனக் காட்டு.



படம் 93.

கோணவேகம் = w என்க

$BP = r$ என்க

$AP = l - r$

உருமணி வழவழப்பானதாக, தூயிர் இருபகுதிகளிலும் இழுவிலை ஒன்றாக இருக்கும்.

1. PA -இல் வழி இழுவிலை = PB -இல் வழி இழுவிலை = T என்க.

$$\therefore T \cos \theta = mg$$

$$T = mg \sec \theta$$

$$mr\omega^2 = T + T \sin \theta$$

$$= mg \sec \theta (1 + \sin \theta)$$

$$\therefore r\omega^2 = g \frac{l-r}{a} \left[1 + \frac{r}{l-r} \right] = \frac{gl}{a}$$

$$\therefore \omega^2 = \frac{gl}{ar} \quad \dots\dots(1)$$

ΔABP -ல்

$$(l-r)^2 = a^2 + r^2$$

$$\therefore r = \frac{l^2 - a^2}{2l} \quad \dots\dots(2)$$

ஆகவே

$$\omega^2 = \frac{gl}{a} \cdot \frac{2l}{l^2 - a^2}$$

$$\therefore \omega = l \left[\frac{2g}{a(l^2 - a^2)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

மேலும்

$$AP - BP = (l - r) - r$$

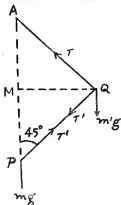
$$= l - 2r$$

$$= l - \frac{l^2 - a^2}{l}$$

$$= \frac{a^2}{l}$$

ஆகவே P எனில் உருமணி, $\frac{a^2}{l}$ அளவு B -க்குப் பக்கத்தில் அமைந்துள்ளது.

13. 2l நீளமுள்ள ஒரு தூலில் ஒரு முனை செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த நிலையான தண்டு ஒன்றில் A எனும் புள்ளியில் கட்டப்பட்டுள்ளது. அதன் மறுமுனை, தண்டின்மேல் நடுவக்கூடிய B திணிவு



உள்ள ஒரு வளைபத்தில் கட்டப்பட்டுக் கிடக்கிறது. B திணிவு உள்ள ஒரு துகள், தூலில் ஈமயப்புள்ளியான Q-ல் கட்டப்பட்டு, θ எனும் திசை வேகத்தோடு, $AQP = 90^\circ$ என இருக்கிறது, கிடைதளத்தில் ஒரு வட்டத்தில் சுற்றிவருகிறது.

$$m' v^2 \sqrt{2} = (2m + m') g l$$

என நிறுவுக.

$$\angle AQP = 90^\circ, \quad AQ = QP = l$$

\therefore P தண்டின்மேல் நடுவாகவும், நிலையாக அமைந்துள்ளது.

$$QA \text{ வழியே இழுவிசை} = T$$

$$QP \text{ வழியே இழுவிசை} = T'$$

எனவே

P-ல் இயக்கத்திற்குச் சமன்பாட்டைத் தண்டின் திசையில் எழுத,

$$0 = mg - \frac{T'}{\sqrt{2}}$$

படம் 94.

$$\therefore T' = mg \sqrt{2} \quad \dots\dots(1)$$

Q-ல் அமைந்துள்ள புள்ளி θ எனும் வேகத்தோடு, வட்டத்தில் சுழல்கிறது.

$$MQ = l \sin 45^\circ \\ = \frac{l}{\sqrt{2}}$$

தூலில் இயக்கத்திற்குச் சமன்பாட்டை எழுத,

$$m'g + \frac{T'}{\sqrt{2}} = \frac{T}{\sqrt{2}} \quad \dots\dots(2)$$

$$\frac{T'}{\sqrt{2}} + \frac{T}{\sqrt{2}} = \frac{m'v^2 \sqrt{2}}{l} \quad \dots\dots(3)$$

(2), (3)-ல் இருத்து

$$\frac{m'v^2 \sqrt{2}}{l} = m'g + T' \sqrt{2} \quad \dots\dots(4)$$

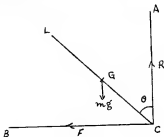
(1), (4)-ல் இருந்து T -இ தீர்வு

$$\frac{m'v^2\sqrt{2}}{l} = m'g + 2mg$$

$$\therefore m'v^2\sqrt{2} = (2m+m')lg$$

14. சைக்கிளில் செல்லும் ஒருவர் 100 அடி விட்டமுள்ள ஒரு வளைவுப் பாதையின் மணிக்கு 10 மைல் வேகத்தில் செல்கிறார். சைக்கிளின் தளம், செங்குத்து திசையில் இருந்து எவ்வளவு சாய்ந்திருக்கிறது எனக் காண்கிறது.

சைக்கிள் தரவுகளில் இருக்க, சைக்கிளுக்குப் பாதைக்குமிடையே யுள்ள உராய்வு எண்ணின் சிறும மதிப்பைக் காண்கிறது.



உடல் 95.

$$F = m \frac{v^2}{r}$$

$$R = mg$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{F}{R} = \frac{v^2}{gr}$$

$$v = 10 \text{ மை/வ} = 10 \times \frac{22}{15} = \frac{44}{3} \text{ அடி/வி}$$

$$r = 50 \text{ அடி} \quad g = 32 \text{ அடி/(வி)}^2$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{44 \times 44}{9 \times 50 \times 32} = .1344$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}(.1344) = 7^\circ 39'$$

மேலும் F -ன் உச்ச மதிப்பு μR

$$\therefore F < \mu R$$

$$\therefore v_2 < \mu g r$$

$$\mu > \frac{v^2}{g r}$$

$$\text{ஆகவே } \mu\text{-ன் சிறும மதிப்பு} = \frac{v^2}{g r} = 0.344$$

15. வட்ட வடிவில் அமைந்துள்ள ஓர் மிருப்புப் பாதையில் ஆரம் 1089 சென்டீமீ. தண்டவாளங்களுக்கு இடையே உள்ள தூரம் 4.5 அடி. வெளிப்புறத் தண்டவாளங்கள், உட்புறத் தண்டவாளங்களைவிட 4 அடி உயர்த்தப்பட்டுள்ளன. சக்கர விளிம்புகள் எவ்வித அழுத்தத்தையும் செயற்படுத்தாமல் இருக்கவேண்டிய வேகம் என்ன?

இடைமட்டத்துடன், பெட்டியின் அடிப்பாகம் உண்டாகும் கோணம் θ எனில்,

$$\tan \theta = \frac{4''}{54''} = \frac{2}{27}$$

விளிம்புகளுக்கும், தண்டவாளங்களுக்கும் இடையே அழுத்தம் இல்லாமல் இருக்க,

$$\tan \theta = \frac{v^2}{r g}$$

$$\therefore v^2 = g r \tan \theta$$

$$\therefore v = \sqrt{32 \times (1089 \times 3) \times \frac{2}{27}}$$

$$= 88 \text{ அடி/வி}$$

மீரலில் பெட்டி செல்லவேண்டிய வேகம் = 60 கை/மணி.

16. 1200 அடி ஆரமுள்ள ஒரு வட்டப் பாதையில், ஓர் மீரலில் வண்டி மணிக்கு 30 கைம் வேகத்தில் செல்வதற்கு, தண்டவாளங்களுக்கு இடையே உள்ள தூரம் 5 அடி என்றால், தண்டவாளங்களுக்கும், சக்கர விளிம்புகளுக்கும் இடையே அழுத்தம் இல்லாமல் இருக்க, வெளித்தண்டவாளங்களை எவ்வளவு தூரம் உயர்த்தி அமைக்க வேண்டும்?

இடைமட்டத்திற்கும், பெட்டியின் அடித்தளத்திற்கும் இடையே உள்ள கோணம் θ எனில்,

$$\tan \theta = \frac{v^2}{gr}$$

$$v = 30 \text{ மை/மணி} = 44 \text{ அடி/வி}$$

$$r = 1200 \text{ அடி}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{44 \times 44}{32 \times 1200}$$

$$= \frac{121}{2400}$$

θ-ன் மதிப்பு சிறியதாகையால்

$$\tan \theta \approx \theta \approx \sin \theta$$

தண்டவாளங்களுக்கு இடையே உள்ள தூரம் = 5 அடி

∴ வெளித் தண்டவாளம் உயர்த்தப்பட

$$\text{வேண்டிய தூரம்} = 5 \sin \theta$$

$$= 5 \times \frac{121}{2400}$$

$$= \frac{121}{480} \text{ அடி}$$

$$= \frac{121}{40} \text{ அங்}$$

$$= 3.025 \text{ அங்}$$

வெளிப்புறத் தண்டவாளம், உட்புறத் தண்டவாளத்தைவிடத் தோராயமாக 3.025 அங். உயர்த்தப்படவேண்டும்.

17. ஒரு வட்ட வடிவான மட்டையின் ஆரம் 4 அடி; அதன் திணிவு 1 பவு. அது அதன் மட்டையத்தையுடைய விநாடிக்கு 8 மூறை சீராகச் சுற்றி வருகின்றது. மட்டை தளக்கவடிவ மிடுவின்ை 512π பவுண்டிற்கு விட அதிகமாக கிராமர்பிட்டசுக் மட்டை அடுத்து விடும் எனக் காட்டு.

$$\text{கோணத் திசைவேகம்} = \omega \text{ என்சு.}$$

$$\text{மிடுவின்ை } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

(மிடுகு m எனப்படு ஒர் அவகு நீளப்பட்டையின் திணிவு; r அதன் ஆரம்)

$$r = 4 \text{ அடி}$$

$$\omega = 2\pi \times 8 = 16\pi \text{ ஆளவண்டி/விநாடி}$$

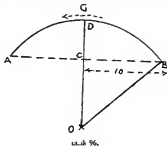
$$m = \frac{1}{\text{திறவு}} = \frac{1}{2\pi \times 4} = \frac{1}{8\pi} \text{ பவு.}$$

$$\therefore T = \frac{1}{8\pi} \times 16 \times 256\pi^2$$

$$= 512\pi \text{ பவுண்டுகள்.}$$

எனவே, நிறுவனம் 512π பவுண்டுகளுக்குக் குறைவாக நிரூபணம் பட்டை அனுப்பியும்.

18. ஒரு வரலாற்று அகலம் 20 மீட்டர். அதன்மேல் வட்ட வில்லின் வடிவத்தில் அமைந்த பாதத்தின் மையப்புள்ளி, அதன் நிருவணத்தை விட 2½ மீட்டர் உயரத்தில் உள்ளது. மோட்டார் ஸெக்ஸிஸ் செல்லும் ஒருவரின் எடை (ஸெக்ஸிஸின் எடையுடன் சேர்த்து) தரைக்கு மேல் ½ மீட்டர் உயரத்தில் அமைவதாகக்கொண்டால், அவர் பாதையை விட்டுத் தூக்கி எறியப்படாமல் செல்லக்கூடிய பெரும் வேகத்தைக் கணக்கிடுக.



AB பாதத்தைக் குறிக்கின்றது.

D பாதத்தின் உச்சிப்புள்ளி.

O வட்டப்பாதத்தின் மையம்.

$$OD = r \text{ (ஆரம்)}$$

$$CD = 5/2$$

$$\left(r - \frac{5}{2}\right)^2 + 10^2 = OB^2 = r^2$$

$$\therefore -\frac{5}{4}r + \frac{25}{4} + 100 = 0$$

$$r = \frac{85}{4} \text{ மீட்டர்கள்}$$

∴ புவிச்சுழி மையமான G , $21\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 22$ மீ. ஆரமுள்ள வட்டத்தின் அமைவும், m எடையது மைக்கிள், ஒட்டுமாத் திவர்களைத் திணிவு எனில்,

$$\frac{mv^2}{r} = mg - R$$

$$\therefore R = m \left[g - \frac{v^2}{2200} \right]$$

பாதையை விட்டு எகிதிக் செல்லாமல் இருக்க, R எதிர் எண்ணாகக் கூடாது.

$$\therefore \text{அதாவது } v^2 \leq 2200 g$$

$$v^2 \leq \sqrt{22 \times 98000} \text{ செ.மீ./வி.}$$

∴ பெரும வேகம் (எகிதிக் செல்லாமல் இருக்க)

$$= \sqrt{22 \times 98000}$$

$$= 1468.2 \text{ செ.மீ./வி.}$$

$$= 14.7 \text{ மீ./வி.}$$

19. O -ஐ நிலையாகக் கொண்டு, a நீளமுள்ள OA எனும் ஒரு கிழுகை r மெல்லிய தூறில் மறுமுனையில் கட்டப்பட்டுள்ள ஒரு துகள், $\sqrt{\frac{7ag}{2}}$ எனும் திசையேகத்துடன் ஏவப்படுகிறது. அத் துகள் A -ல் இருந்து $\frac{3a}{2}$ உயரத்தை அடைந்த பின்னர் வட்டத்தை விட்டு விலகிக் செல்லும் எனக் காட்டு.

தொடக்க நிலையில் திசையேகம் u என்றும், h உயரத்திற்கு இருக்கும் போது திசையேகம் v எனவும் கொண்டால்

$$v^2 = u^2 - 2gh \quad \dots\dots(\text{சமன்பாடு 1, §§ 8-12})$$

மேலும் கிழுகின் $T = \frac{m}{a} [u^2 + g(a - 3h)] \dots\dots(\text{சமன்பாடு 2, §§ 8-12})$

$$u = \sqrt{\frac{7ag}{2}}$$

எனவே,

$$\therefore v^2 = \frac{7ag}{2} - 2gh$$

$$T = \frac{m}{a} \left[\frac{7ag}{2} - 3gh \right]$$

$h = \frac{3a}{2}$ எனில் T பூச்சியமாகும்.

$h = \frac{7a}{4}$ எனில் τ பூச்சியமாகும்.

∴ திசையேகம் பூச்சியமாகாமல் தேர் எண்ணாக இருக்கும் போதே, கிழுவிகை பூச்சியமாகின்றது.

ஆகவே $h = \frac{3a}{2}$ இருக்கும் போது, துகள் வட்டத்தைவிட்டு விலகிச் செல்கிறது.

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1-ஆம் பகுதி

1. வழவழப்பான கிடைதள மேசைமீது ஒரு திசையான புள்ளியில் கட்டப்பட்ட 9 அடி நீளமுள்ள ஒரு கயிற்றின் மறுமுனையில், 16 பவுண்ட் திணிவு உள்ள துகள் ஒன்று கட்டப்பட்டு, 6 அடி/வி. வேகத்துடன் ஒரு வட்டத்தில் கிழங்குகிறது. தூவின் கிழுவிகையைக் கண்டுபிடி. [2 பவு. எடை]

2. 10 கிராம் திணிவு உள்ள ஒரு துகள், 20 செ.மீ. நீளமுள்ள ஒரு தூவின் முனையில் கட்டப்பட்டு, அதன் மறுமுனையை திசையாகக் கொண்டு, ஒரு வழவழப்பான மேசையின்மேல் 12 செ.மீ./வி. வேகத்துடன் வட்டப்பாதையில் கிழங்கிவருகிறது. தூவின் கிழுவிகை என்ன? [72 எடையுள்ள]

3. 12 அடிநீர் திணிவு உள்ள ஒரு துகள், 3 அடி நீளமுள்ள தூவின் முனையில் கட்டப்பட்டுக் கிடைதளத்தில் வட்டப்பாதையில் சுற்றிவருகிறது. தூர் ஒரு நிமிடத்திற்கு 20 முறை சுற்றிவந்தால், அதன் கிழுவிகையைக் கண்டுபிடி. [π^2 பவுண்டுகள்]

4. வழவழப்பான கிடைதள மேசைமீது ஒரு திசையான புள்ளியில் கட்டப்பட்ட 20 கிராம் திணிவு உள்ள ஒரு துகள், 60 செ.மீ. ஆரமுள்ள ஒரு வட்டப்பாதையில், 4 விநாடிக்கு ஒருமுறை சுற்றிவருகிறது. கயிற்றின் கிழுவிகையைக் கண்டுபிடி. [3.02 கிராம் எடை]-4

5. 8. கிலோகிராம் திணிவு உள்ள தூங்கு துகள்கள், 2 மீட்டர் நீளமுள்ள பெல்மேது தூங்குகள் கட்டப்பட்டு ஒரு சதுரத்தை அமைக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளன. சதுரம் கிடைதளத்தில் ஒரு முறை சுற்றிவர 8 விநாடிகள் எடுத்துக்கொண்டால், தூவின் கிழுவிகையைக் கண்டுபிடி. [32 நியூட்டன்கள்]

6. 5 அடி நீளமுள்ள ஒரு தூல் 20 பவு. எடையைச் சுற்றே தாங்குகிறது. அதன் மூலையில் கட்டப்பட்டுள்ள 5 பவு திணிவு உடன் ஒரு துகள், தூல் அதுபடாமல் 10 நிமிடங்களில் எவ்வளவு மூறை சுற்றி வரமுடியும். [483]

7. 20 உள் திணிவு உடன் ஓர் விரயிர்வண்டி, கிடைதளத்தில் உடன் 1200 அடி ஆரமுள்ள ஒரு வட்டப்பாதையில் மணிக்கு 30 மைல் வேகத்தில் செல்கிறது. தண்டவாளங்கள் விரயிர் வண்டியின்மீது செலுத்தும் அழுத்தம் என்ன? [1.13 டன் எடை]

8. மேகஸ்பீன்மீது ஒரு மூளை நினைவாகக் கட்டப்பட்டுள்ள 4 அடி நீளமுள்ள தூலின் மறுமூலையில், 5 பவு. திணிவு உடன் ஒரு துகள் கட்டப்பட்டு வட்டப்பாதையில் இயங்குகிறது. கயிற்றின் மிழுவின்சு 2½ பவு. எடை எனில் துகளின் வேகம் என்ன? [8 அடி/வி.]

9. வட்டமேகஸ்பீது அதன் மையத்தில் இருந்து 3 அடி தொலைவில் ஒரு பொருள் வைக்கப்பட்டுள்ளது. மேகஸ்பீது அதன் மையம் வழியாகச் செல்லும் செங்குத்தான அச்சுப்பற்றிச் சுழற்றத் தொடங்கி, அதன் வேகம் சிறிது சிறிதாக அதிகப்படுத்தப்படுகிறது. $\mu = 0.6$ எனில் (உராய்வு எண்) பொருள் நழுவுத் தொடங்கும்போது அதன் கோணத்திசைவேகம் என்ன? [2.53 ரேடியன்/வி]

10. வழவழப்பான மேகஸ்பீல் உடன் துவாரத்தின் வழியே செல்லும் ஒரு திணிவுள்ள மூலையில் m தூலின் துகளும், மறுமூலையில் M திணிவு உடன் துகளும் கட்டப்பட்டு, மூதல் துகள் மேகஸ்பீன்மீது வைக்கப்பட்டுள்ளது. k மீது உடன் துகள் ஒரு திணிவிலேயே அமைய, மேகஸ்பீதுடன் துகள் r ஆரமுள்ள ஒரு வட்டப்பாதையில் விநாடிக்கு எவ்வளவு மூறை சுற்றி வரவேண்டும்? $\left[\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Mg}{mr}} \right]$

11. கிடைதளத்தில் உடன் 5 அடி விட்டமுள்ள ஒரு வட்டமேகஸ, அதன் மையம் வழியாகச் செல்லும் செங்குத்தான அச்சுப்பற்றி நிமிடத்திற்கு 25 மூறை சுற்றியருகிறது. மேகஸ்பீன்மீது வைக்கப் பட்டுள்ள ஒரு நாணயமும் அதுனுடன் சேர்த்து சுழலுகிறது. நாணயத் திற்கும் மேகஸ்க்கும் ஆன உராய்வு எண் 0.3 எனில், நாணயம் மேகஸையவிட்டு ஒடாமல் இருக்க, மையத்திலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் வைக்கப்படவேண்டும். [1.4 அடி]

12. வழவழப்பான கிடைதள மேகஸ்பீது ஒரு புள்ளியில் கட்டப் பட்ட ஓர் அடி நீளமுள்ள மீட்சியுற தூலின் மறுமூலையில் ஒரு துகள் கட்டப்பட்டு நிமிடத்திற்கு 20 மூறை சுற்றுகிறது. தூலின் மீட்சித்

குணகம் தூனின் எடைக்குச் சமமாகின், தூனின் நீட்சி கயர்ச் 2 அங். எனக்காட்டு.

13. ஓர் அடி நீளமுள்ள ஒரு மெல்லிய கயிறு, 4 பவு. எடைக்கு 1 அங். நீட்சியைப் பெறக்கூடும். அக்கயிற்றின் ஒரு முனையில் கட்டப் பட்ட 10 பவு. திணிவு உட்கள் ஒரு துகள் விநாடிக்கு ஒரு முறை வட்டப் பாதையில் சுழன்று வருகிறது. அந்த வட்டப்பாதையின் ஆரம் 1.346 அடி என்றும், கயிற்றின் கிழுவியை 16.61 பவு. எடை எனவும் காட்டு.

14. ஒரு காட்டாற்றின்மேல் கட்டப்பட்ட பாலம் 50 அடி ஆரமுள்ள வட்டவில்கின் உருவில் அமைந்துள்ளது. வேகமாக மோட்டாச் ஊக்கியில் அப்பாலத்தைக் கடக்கும் ஒருவர், பாதையைவிட்டுத் தூக்கி எறியப்படாமல் செல்லக்கூடிய அதிகபட்ச வேகம் என்ன? [40 அடி/வி.]

2-ஆம் பித்தவு

1. 40 பவுண்டு திணிவு உட்கள் குணகடையும் 4 அடி நீளமுள்ள கயிற்றையும் கொண்ட ஒரு கூம்பு ஊசல் திமிடத்திற்கு 30 முறை சுழங்கிறது. கயிற்றின் கிழுவியை $160\pi^2$ பவுண்டுகள் எனவும், செங்குத்துத் திசையுடன் அது உண்டாக்கும் கோணம் $\cos^{-1} \left(\frac{8}{\pi^2} \right)$ எனவும் காட்டு.

2. செங்குத்துத் திசையுடன் 30° அமைக்கும், 4 அடி நீளமுள்ள கூம்பு ஊசலின் சுழற்சி நேரம் 1.6 விநாடிகள் எனக் காட்டு. குண்டின் எடை 5 பவு. எனில் கயிற்றின் கிழுவியை என்ன? [5.77 பவு.]

3. ஒரு கூம்பு ஊசலின் உயரம் 49 செ.மீ., கயிற்றின் திண்ம 60 செ.மீ., குண்டின் எடை 10 கிராம் எனில் கயிற்றின் கிழுவியை என்ன? [12000 கடைக்கள்]

4. செங்குத்துத் திசையுடன் 30° அமைக்கும், 40 செ.மீ. நீள முள்ள கூம்பு ஊசலின்

(i) கோணவேகம் 7 ஆர்ப்பஸ்/விநாடி

(ii) திசைவேகம் 140 செ.மீ./விநாடி

(iii) சுழற்சி எண்ணிக்கை $\frac{7}{2\pi}$

எனக் காட்டு.

5. ஒரு கூம்பு ஊசலில், தூயின் நீளம் 2 அடி, குண்டின் திணிவு 4 பவு. நிமிடத்திற்கு 120 மூறை சுற்றும்போது தூசு அடுத்தாண்டும் நிலையை அடைகிறது. தூசு நாய்க்கூடிய உச்ச விசுவகோண என்ன? [4π² பவு. எடை]

6. ஒரு கூம்பு ஊசல் அமைப்பில் சுவித்தின் நீளம் 3 அடி. குண்டின் திணிவு 2 பவு. சுவித்தின் பெரும விசுவகோண 12π² பவு. எடை எனில், ஒரு நிமிடத்தில் பெறக்கூடிய பெருமச் சுழற்சி எண்ணிக்கையைக் காண்கிறது. [240]

7. ஒரு கூம்பு ஊசலில் சுவித்தின் நீளம் 1 மீ.; குண்டின் திணிவு 1 கி.கி.; சுவிது நாய்க்கூடிய விசுவகோண 1½ கி.கி. குண்டின் பெரும சுழற்சிவேகத்தையும், திசைவேகத்தையும் காண்கிறது. [3.5 மூறையங்கு/வி.; 2.1 மீ./வி.]

8. A என்ற புள்ளியில் L நீளமுள்ள மீட்சியுறு சுவிது ஒன்றில் இணைக்கப்பட்ட ஒரு துகள் கூம்பு ஊசலாகச் சுற்றுகிறது. சுவித்தின் மீட்சிக் குணகம் துகளின் எடையைப்போல் 5 மடங்கு. கூம்பு ஊசலின் உயரம், சுவித்தின் வியல்பாண நீளத்திற்குச் சமமாயின், துகளின் வேகம் $\sqrt{5g}$ எனக்கொட்டு.

9. வியல்பாண நீளம் l உள்ள ஒரு மீட்சியுறு சுவிது, n திணிவு உடைய ஒரு துகளை நாய்க்கும்போது அதன் தீட்சி x ஆகின்றது. அதே எடைபுள்ள துகளுடன் கூம்பு ஊசலாக அமைக்கும்போது சுவித்தின் தீட்சி y எனில்,

$$gy = n(1+y)w^2$$

என திறவுக.

10. 2a நீளமுள்ள ஒரு சுவித்தின் ஒரு முனை O என்ற புள்ளியில் கட்டப்பட்டுள்ளது. சுவித்தின் மையப்புள்ளியில் n திணிவு உடைய ஒரு துகள் கட்டப்பட்டிருக்கிறது. சுவித்தின் மதுமூளையில் அதே அளவு திணிவு உள்ள ஒரு வளைபம் உள்ளது. கிம் வளைபம் O வழியே செல்லும் ஒரு செங்குத்துச் சட்டத்தின்மீது நழுவமுடியும். துகள், கிடைமட்டத்தில், சட்டத்தைப் பொறுத்து, m எனும் கோணவேகத் துடன் சுழல்கும், சுவித்தின் கிடு பகுதிகளும் செங்குத்துத் திசைக்கு

$$\cos^{-1} \left[\frac{3g}{a\omega^2} \right]$$

எனும் கோணத்தில் சமந்த்நிருக்கின்றன என திறவுக.

11. ஒரு துகள் a எனும் சமநீளமுள்ள கிடு சுவிதுகளால், செங்குத்துச் கோட்டின்மேல் அமைந்துள்ள கிடு நிலையான புள்ளி

கனூடன் மீளேக்கப்பட்டிருக்கிறது. துரை மீச் செங்குத்துக் கோட்டைப் பற்றி ம எனும் சீரான கோணவேகத்தினால் சுழல்கின்றது. கப்பலுக்கு மீண்டும் மிதக்கவாகவும், கிடைமட்டத்துடன் θ அளவு சாய்ந்தும் இருந்தால், அவற்றின் மிடுயிசைகள்

$$(av^2 \sin \theta + g) : (av^2 \sin \theta - g)$$

எனும் விகிதத்தில் அமைவும் எனக் காட்டுக.

12. $10''$ தீளமுள்ள புயங்கோலுடைய ஓர் எலிய வேகங்களிலும் அமைவு, நிமிடத்திற்கு 80 சுற்றுகள் வேகத்தில் சுழலுகிறது. புயங்கோலின் சாய்வுக் கோணத்தைக் காக்கிறது.

$$\left[\cos^{-1} \frac{27}{5\pi^2} \right]$$

8 ஆம் பிரிவு

1. 4.2 மீ./வி. வேகத்தில் மிதிவண்டியில் செல்லும் ஒருவர், ஒரு வளைவுப் பாதையில் ஒரு திருப்பத்தில் செல்கிறார். மிதிவண்டிக்கும் (காக்கிலுக்கும்) பாதைக்குமிடையே உராய்வு எண் 0.6 எனில், அவர் கீழே விழாமல் செல்லக்கூடிய வட்டப்பாதையின் மிகக் குறைந்த ஆரம் என்ன?

[3 மீட்டர்கள்]

2. 7.5 மைல்/மணி வேகத்தில் காக்கிலில் செல்லும் ஒருவர், ஒரு வட்டப்பாதையில் ஒரு சத்தின் மூளையில் திரும்புகிறார். காக்கிலுக்கும் பாதைக்கும் கிடையே உராய்வு எண் 0.3 எனில், அவர் செல்லக்கூடிய வளைவுப் பாதையின் சிறிய ஆரம் என்ன?

[16.9 அடி]

3. காக்கில் சக்கரங்களுக்கும் பாதைக்கும் கிடையே 0.32 உராய்வு எண் உள்ள, ஒரு கிடைதள வட்டப்பாதையில் ஆரம் 220 அடி எனில், அப் பாதையில் காக்கிலில் செல்லும் ஒருவர் போகக்கூடிய மிக உயர்ந்த வேகம் என்ன?

[32 $\sqrt{7}$ அடி/வி.]

4. 4 மீட்டர் ஆரமுள்ள ஒரு வட்டப்பாதையில் ஒருவர் காக்கிலில் செல்கிறார். தரையில் உராய்வு எண் $\frac{2}{3}$ எனில், அவர் செல்லக்கூடிய மீட்டெரு வேகம் என்ன?

[16.8 கி.மீ./ம.]

5. 100 சென்டி ஆரமுள்ள ஒரு வட்ட வடிவான மைதானத்தில், மணிக் கு 15 மைல் வேகத்தில் ஒருவர் காக்கிலில் செல்கிறார். அதே வேகத்தில் கீழேவிழாமல் அப்பாதையைச் சுற்றிவர, அவர் நினைக்கத்தகுந்த திசையிலிருந்து எவ்வளவு சாய்ந்திருக்க வேண்டும்?

[$\tan^{-1} \frac{1}{2\sqrt{3}}$]

6. 100 அடி ஆரமுள்ள ஒரு வட்டப்பாதையில், மணிக் கு 12 மைல் வேகத்தில் ஒருவர் காக்கிலில் செல்கிறார். அதே வேகத்தில் கீழே

விறாமை அப்பாதையைச் சுற்றிவா அங் றிங்குத்துத் திசையிலிருந்து எவ்வளவு சாய்ந்திருக்க வேண்டும்? காக்கிச் பாதையில் நடுவரைச் செல்வதே தேவையான மிகக் குறைந்த உரையு என (காக்கிக்குக்கும் பாதைக்கும் இடையே) என்ன? $[5^{\circ} 12'; 0.091]$

7. 1½ மெட்ரிக் டன் கன அடியுள்ள ஒரு டிராம்வண்டி (Tramcar) 3 கி.மீ. ஆரமுள்ள ஒரு வட்டப்பாதையில், மணிக்கு 6 கி.மீ. வேகத்தில் செல்கின்றது. தண்டவாளங்களைவிடச் சேயற்படும் வெளிப்புற விசை என்ன? $[g = 9.8 \text{ மீ./வி. எனக்கொள்க.}]$ $[\frac{1}{12} \frac{1}{3} \text{ கி.கி. எடை}]$

8. கிடைதள மட்டத்தில் 150 அடி ஆரமுள்ள ஒரு வட்டப் பாதையில் ஒரு மோட்டார் காச் செல்கின்றது. அதன் மிகு சக்கரங் களுக்குக் கிடைவே உட்கு தூரம் 4 அடியாகவும், அதன் புவிசர்ப்பு மையம் மிகு சக்கரங்களுக்கும் மத்தியில், தளையிலிருந்து 3 அடி உயரத்திலும் இருந்தால், அது கவிழ்ந்துவிடாமல் பாதையில் செல்லக் கூடிய மீட்பெரு வேகத்தைக் கண்டுபிடி. $[40\sqrt{2} \text{ அடி/வி.}]$

9. கிடைதள மட்டத்தில் 30 அடி ஆரமுள்ள ஒரு வட்டப்பாதை யில் ஒரு மிள்கார விரயிவண்டி மணிக்கு 10 மைல் வேகத்தில் செல்கின்றது. மிகுப்புப்பாதையின் அகலம் 4 அடி 6 அங்குலம் எனில், வண்டி கவிழ்ந்துவிடாமல் இருக்கவேண்டுமானால் அதன் புவிசர்ப்பு மையம் தளையிலிருந்து 10 அடி உயரத்திற்குமேல் அமைக்கப்படக் கூடாது எனக் காட்டுக.

10. ஒரு மோட்டார் காசின் வேகம் v . அதன் புவிசர்ப்பு மையம் தளையிலிருந்து h உயரத்திலும், அதன் சக்கரங்களுக்கு கிடைவே உட்கு தூரம் a என இருக்குமதும் அமைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் உட் சக்கரங்கள் பாதையில் இருந்து எழும்பிவிடாதவாறு, அது செல்லக் கூடிய வட்டப்பாதையின் மீச்சிற ஆரம் $\frac{2hv^2}{ag}$ எனக் காட்டுக.

11. ஓர் விரயிவெட்டி, r ஆரமுள்ள வட்டப்பாதையில், v வேகத் துடன் செல்கின்றது. மிகுப்புப்பாதையின் அகலம் $2a$. அதன் புவி சர்ப்பு மையம் பாதையில் இருந்து h உயரத்தில் இருந்தால், உட் சக்கரங்கள்விட விறும் அதன் எடையும், வெளிச் சக்கரங்கள்விட விறும் அதன் எடையும் $gra - hv^2$, $gra + hv^2$ என்ற விவிலத்திதில் அமையும் எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து விரயிவெட்டி கவிறாமை இருக்க,

$$v > \sqrt{\frac{gra}{h}}$$

எனவும் காட்டுக.

12. ஓர் மிரவிக்வண்டி r ஆரமுள்ள ஒரு பாதையில், v வேகத்துடன் செல்கிறது. மிரவிக் பெட்டியின் கூரையிலிருந்து ஒரு கயிற்றின் மூலையில் தொங்கவிடப்பட்டுள்ள m திணிவு உகை ஒரு தூக்குக் குண்டின் விசைகொளும், $\tan^{-1}(v^2/gr)$ எனவும், கயிற்றின் மிகுவிசை $m \sqrt{1 + (v^2/gr)^2}$ எனவும் திடுபுக.

4 ஆம் பிரிவு

1. ஓர் மிருப்புப் பாதை ஓரிடத்தில் 1089 செஜ ஆரமுள்ள வட்ட விக்லின் உருவத்தில் அமைந்துள்ளது. மிருப்புப் பாதையின் தண்டவாளங்களுக்கு மிடையே உள்ள தூரம் 4½ அடி. வெளிப்புறத் தண்டவாளம், உப்புறத் தண்டவாளத்தை விட 4 அங். உயரமாக அமைக்கப்பட்டிருந்தால், தண்டவாளங்களுக்கும் பெட்டிக்கும் மிடையே அழுத்தமே மிஸ்ஸாதவாறு மிருக்க என்ன வேகத்தில் செல்லவேண்டும்? [60 மை./மணி]

2. ஓர் மிரவிக்வண்டி மணிக்கு 30 மைல் வேகத்தில், 1200 அடி ஆரமுள்ள ஒரு வட்டப்பாதையில் செல்கிறது. தண்டவாளங்களுக்கு மிடையே உள்ள தூரம் 5 அடி. தண்டவாளங்களுக்கிடையே விசியு அழுத்தம் (flange pressure) மிஸ்ஸாமல் மிருக்க வெளிப்புறத் தண்டவாளங்களைத் திடீரெனத்திறிந்து எவ்வளவு தூரம் உயர்த்தி அமைக்கவேண்டும்? [3.025 அங்.]

3. r ஆரமுள்ள வட்டவிக்லின் அமைப்பில் உள்ள ஓர் மிருப்புப் பாதையின் தண்டவாளங்களைத் திடீரெனத்திறிடு θ எனும் கோண அளவு சுயத்திருக்குமாறு வெளிப்புறத் தண்டவாளங்களை உயர்மட்டத்தில் அமைக்கப்பட்டுள்ளன. அப்பாதையில் U அளவு வேகத்துடன் ஓர் மிரவிக்வண்டி செல்லும்போது, தண்டவாளங்களுக்கும் பாதைக்கும் மிடையே அழுத்தமே மிருக்காது எனில், V ($\gg U$) அளவு வேகத்திட்டு ஓர் மிரவிக்வண்டி செல்லும்போது தண்டவாளங்களுக்கிடையே செயற்படும் விசியு அழுத்தம் $S = \frac{mg \cos \theta}{r} (V^2 - U^2)$ என திடுபுக.

4. ஒரு வட்டவடிவமான மிருப்புப்பாதையின் ஆரம் 400 செஜம். பாதையின் அகலம் 5 அடி. அதன் வெளித் தண்டவாளம் திடீரெனத்திறிந்து 3 அங்கும உயரத்தில் அமைக்கப்பட்டிருக்கிறது. தண்டவாளங்களுக்கிடையே விசியு அழுத்தம் மிஸ்ஸாதவாறு மிருக்க ஓர் மிரவிக் வண்டி ஏதேனும் மணிக்கு 30 மைல் வேகத்தில் செல்ல வேண்டும் என்று காட்டுக.

இரயில் வண்டியின் எடை 10 டன் என்றால்,

(i) வண்டி ஓடாமல் நிற்கும் போதும்,

(ii) மணிக்கு 25 மைல் வேகத்தில் செல்லும் போதும்,

(iii) மணிக்கு 35 மைல் வேகத்தில் செல்லும் போதும்,

தண்டவாளங்களுக்கும் சக்கரங்களுக்கும் இடையே உள்ள அழுத்தம் எவ்வளவு கணிப்பீடுக.

[(i) 1120 பவு. எடை; 336 பவு. எடை; 417 பவு. எடை (கொராஸ்)]

5. W எடையுள்ள ஓர் இரயில் பெட்டி, θ அளவு வேகத்துடன் செல்லும்போது விசிய்பு அழுத்தம் கிராமல் இருப்பதற்கு ஏற்ப அமைக்கப்பட்டிருக்கும் r ஆரமுள்ள வட்டப்பாதையில், ஓடாமல் நிற்கின்றது. தண்டவாளங்களின்மீது உட்புறமாக,

$$W \frac{v^2}{\sqrt{v^2 + r^2 g^2}}$$

எனும் அழுத்தம் செயற்படுகிறது எனக் காட்டுக.

6. ஒரு வண்டிப் பாதை, இரயில் வண்டி V_1 வேகத்துடன் செல்லும் போது உட்புறத் தண்டவாளங்களின்மீது செயல்படும் அழுத்தமும், வண்டி V_2 ($> V_1$) வேகத்துடன் செல்லும்போது வெளிப்புறத் தண்டவாளங்களின்மீது செயல்படும் அழுத்தமும் சமமானதாக இருக்குமாறு உயர்த்தி அமைக்கப்பட்டிருக்கிறது. இரயில் பெட்டி $\sqrt{V_1^2 + V_2^2}$ எனும் வேகத்துடன் சென்றால், எந்தத் தண்டவாளத்தின் மீதும் விசிய்பு அழுத்தமே இராது எனக் காட்டுக.

6-ஆம் பிரிவு

1. ஒரு வழவழப்பான தேர் வட்டக் கூம்பின் உச்சிக் கோணம் 2α . அது அச்சை நினைக்குத்தரையும், உச்சிப்புள்ளி கீழேயும் உள்வாது, அச்சைப்பற்றி m எனும் சீரான கோணவேகத்துடன் சுழன்று வருகிறது. அதன் உட்புறப் பரப்பில் வைக்கப்படும் ஒரு துகள் சர்பு அமைதி நிலைபெற இருக்க எங்கு வைக்கப்படவேண்டும்?

$$\left[\text{அச்சில் இருந்து } \frac{g \cot \alpha}{\omega^2} \text{ தூரத்தில்} \right]$$

2. 4a செல்வகமறுள்ள ஒரு பரவளைவு உருவிக் அமைந்த வழவழப்பான குழி, அதன் அச்சை நினைக்குத்தரையும், உச்சிப்புள்ளி கீழேயும் உள்ளவாறு வைக்கப்பட்டு, அச்சைப்பற்றிச் சுழலுகின்றது.

- (i) அழற்சியின் கோணவேகம் $\sqrt{\frac{g}{2a}}$ எனில், குறறுக்கும் வைகைப் படும் துகள் எந் நிலையிலும் சர்பு அமைதி பெற்றிருக்கும் எனவும்,
 (ii) கோணவேகம் வேறு ஏதாவது மதிப்பைப் பெற்றிருந்தால் அது குறையின் அடிப்புள்ளியைத் தவிர வேறெங்கும் சர்பு அமைதி நிலையில் இருக்க முடியாது எனவும் காட்டுக.

3. ஒரு சீரான வட்டவடிவமான கம்பியின் ஆரம் 6 அடி; திணிவு 2 பவு. கம்பி மையத்தைப்பற்றி 1 விநாடிக்கு 12 முறை சுற்றி வருகின்றது. கம்பி தாங்கக்கூடிய மிழுவின் 108 பவு. எடைக்குமேல் கிடவாவிடில், கம்பி உடைந்துவிடும் எனக் காட்டுக.

6-ஆம் பிரிவு

1. ஒரு பாலத்தின் கீழமைத்த 50½ அடி ஆரமுடைய வட்ட வில்லின் வடிவிலமைத்த சாலைவழியே, மோட்டார் கைக்கிலிச் செல்லும் ஒருவர், பாலத்தின் உயர்த்த புள்ளியிலும் பாதையிலிருந்து எதிரியிடாமல் செல்கக்கூடிய மீட்பெரு வேகம் என்ன? (30 மை./மணி)

2. ஒரு பாலத்தின் கீழமைத்த 63 அடி ஆரமுடைய வட்டவில்லின் வடிவிலமைத்த சாலைவழியே 1 டன் திறையுள்ள ஒரு கார் மணிக்கு 30 மைல் வேகத்தில் செல்லுகிறது. வட்டவில்லின் நாய்த்த புள்ளியில் காருக்கும் சாலைக்கும் கிடைவேயுள்ள எதிர்விசையைக் கணக்கிடுக.

(1·96 டன் எடை)

3. வழவழப்பான நிலையான வட்டத்தின் உச்சியில் ஒய்விலிருந்து ஒரு துகள் வெளிப்புறத்திற் கீழே நழுவுகிறது. துகள் வட்டத்தை விட்டு விளகிச் செல்லும் பரவினைவுப் பாதையின் செய்வகலை, வட்டத்தின் ஆரத்தின் $\frac{1}{2}$ மடங்கு எனக் காட்டுக.

4. α என்ற ஆரத்தைபுடைய வழவழப்பான நிலையான கோளத்தின் உச்சியில், ஒய்விலிருந்து ஒரு துகள் கீழே நழுவுகிறது. துகளானது, கோளத்தின் அடிவழியே செல்லும் கிடைதளத்தைச் செங்குத்து விட்டத்தின் கிழுத்து $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+4\sqrt{2})$ α எனும் தொலைவில் வந்து அடைபுகும் எனக் காட்டுக.

5. α எனும் ஆரத்தைபுடைய வழவழப்பான நிலையான கோளத்தின் வெளிப்புறத்தின், உச்சியில், ஒய்விலிருந்து n திணிவு உடைய ஒரு துகள் கீழே நழுவுகிறது. துகள் h உயரம் கீழே நிற்கவிய நிலையில் கோளத்தின்மேல் அதன் அழுத்தம் $mg(\alpha - 3h)/\alpha$ எனக் காட்டுக. கீழிலிருந்து, உச்சிப் புள்ளிக்குக் கீழே $\frac{\alpha}{2}$ உயரம் வந்தடைந்த பிறகு, துகள் கோளத்தைவிட்டு அகலும் எனக் காட்டுக.

6. ஒரு வட்டத்தின் ஆரம் r . அதன் வெளிப்புறத்தில் ஒரு துண், உச்சிப்புள்ளியிலிருந்து u எனும் திசையேகத்துடன் ஏவப்படுகிறது. $u^2 < gr$ என்றில்லாவிடில், துண் உடனே வட்டத்தை விட்டு ஒடியிடும் எனக் காட்டு.

7. ஒரு வட்டத்தின் ஆரம் r . அதன் வெளிப்புறத்தில் ஒரு துண், உச்சிப் புள்ளியில் இருந்து $\sqrt{2gr}$ எனும் திசை வேகத்துடன் ஏவப்படுகிறது. அது $\frac{u}{6}$ ஆளும் (செங்குத்துத் திசையில்) நிறங்கிய பிறகு, வட்டத்தைவிட்டு விலகும் எனக் காட்டு. வட்டம் நிற்றும் கிடைதளத்தை அது வந்ததையும்போது அதன் திசைவேகத்தின் மதிப்பைக் காண்க.

$$\sqrt{\frac{5gr}{2}} \text{ அடி/வி.}$$

8. u எனும் ஆரத்தைமைய வட்டத்தின் வெளிப்புறத்தில், உச்சியிலிருந்து (தொடுகாட்டுத் திசையில்), $\sqrt{gr} (3\sqrt{2}-4)/2$ எனும் திசைவேகத்துடன் ஒரு துண் ஏவப்படுகிறது. அது வட்டத்தை விட்டு விலகும்போது அதன் ஆரம் செங்குத்துத் திசையுடன் உண்டாகும் கோணத்தைக் காண்க. (45°)

9. ஒரு வட்டத்தின் ஆரம் a , வட்டத்தின்மேல், உச்சிப் புள்ளியிலிருந்து h எனும் ஆழத்தில் கீழே உண் புள்ளியிலிருந்து, u திணிவு உடைய ஒரு துண், u திசைவேகத்துடன் ஏவப்படுகிறது. துண் வட்டத்தின்மேல் சுற்றி வரும்போது, k எனும் கணத்தில், உச்சிப்புள்ளியிலிருந்து அது h ஆழத்தில் இருந்தால், அக் கணத்தில் வட்டத்தின் அழுத்தம்

$$\frac{mg}{a} \left[a - 3h + 2k - \frac{u^2}{g} \right]$$

எனக் காட்டுக.

7-ஆம் பிரிவு

1. ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து a நீளமுள்ள ஒரு கயிற்றில் தொங்கவிடப்பட்டுள்ள ஓர் எடை மிக்க துண் ஒன்று $\sqrt{\frac{7ag}{2}}$ எனும் கிடைதள வேகத்துடன் ஏவப்படுகிறது. அது செங்குத்துத் திசையுடன் 120° கோணம் உண்டாகும்போது கயிறு தொய்த்துவிடுகிறது எனக் காட்டுக.

2. ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து a நீளமுள்ள கயிற்றில் தொங்கவிடப்பட்டுள்ள ஓர் எடை மிக்க துண் ஒன்று $\sqrt{(2+\sqrt{3})ag}$

எனும் கிடைதள வேகத்துடன் ஏவப்படுகிறது. அது செங்குத்துத் திசையுடன் $0.05^{-1} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ கோணம் உண்டாகும்போது அது ஒர் எதிர்மொழுவாக மியக்க ஆரம்பிக்கின்றது எனக் காட்டுக.

3. α என்ற ஆரத்தையுடைய வழுவுறப்பாண ஊட்ட வளைபத்தின் உட்புறமாக, அதன் அடிப் புள்ளியிலிருந்து $\frac{1}{2} \sqrt{95g}$ எனும் திசை வேகத்துடன் ஒரு துகள் ஏவப்படுகிறது. அத்துடன், உச்சிப் புள்ளியிலிருந்து 0.05^{-1} $\frac{1}{2}$ கோணத் தூரத்தை அடைந்ததும் ஊட்டத்தையிட்டு விலகும் எனக் காட்டுக. அக் கணத்தில் அதன் திசைவேகம் $\frac{1}{2} \sqrt{15g}$ எனவும் காட்டுக.

4. r என்ற ஆரத்தையுடைய ஊட்ட வளைபத்தின் உட்புறமாக, அதன் அடிப் புள்ளியிலிருந்து ஒரு துகள் ஏவப்படுகின்றது. அத் துகள் செங்குத்துத் திசையுடன் 30° கோணத் தூரத்தை அடைந்ததும் ஊட்டத்தையிட்டு விலகிச் செல்கின்றது. அதன் தொடக்கத் திசைவேகம் என்ன?

$$[\sqrt{3}gr(4+3\sqrt{3})]$$

5. ஒரு ஊட்ட வளைபத்தின் கீழ்ப்புள்ளியிலிருந்து ஏவப்படும் ஒரு துகள், சுற்றளவில் மூன்றில் ஒரு பங்கு தூரம் கடந்த பிறகு ஊட்டப் பாதையைவிட்டு விலகிச் செல்கின்றது. வளைபத்தின் ஆரம் 21 அங். எஸிம், தொடக்கத் திசைவேகம் என்ன?

$$[14 \text{ அங்./வி.}]$$

6. ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து α திசையுள்ள ஒரு கயிற்றுச் தொக்கவிடப்பட்டுள்ள n பல. திணிவு உள்ள ஒரு துகள், $\sqrt{20g}$ அடி/வி. கிடைதள வேகத்துடன் ஏவப்படுகிறது. கயிற்று தளமும் போது, துகள் தொங்குநிலைத்திக்குமேல் எவ்வளவு உயரத்தில் உட்காது? தொங்குநிலைத்திக்கு $\frac{\alpha}{2}$ திசை ஆழத்தில் மிடுக்கும் புள்ளி

$$\text{யில், கயிற்றின் மிடுவிலை என்ன? } \left[\frac{2\alpha}{3} \text{ அடி; } \frac{7ng}{2} \text{ பல்கண்டுகள்} \right]$$

7. ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து, l திசையுள்ள ஒரு கயிற்றால் தொங்கவிடப்பட்டுள்ள ஒரு துகள் \sqrt{ng} எனும் கிடைதள வேகத்துடன் ஏவப்படுகிறது. உச்சிப் புள்ளியை அடைவதற்குள்ளே கயிற்று தளத்துவிட்டாகி, அது $\frac{l}{3}(1+n)$ எனும் உயரத்தில் அம்வாறுகின்றது, எனக் காட்டுக.

8. ஒரு வழுவுறப்பாண ஊட்ட வளைபத்தின் உட்புறமாக, அடிப் புள்ளியிலிருந்து $8\sqrt{3}$ அடி/வி., வேகத்துடன் ஒரு துகள் ஏவப்படு

கிளர்தது துசன் கிடுகு விழுமுன் அது செல்வக்கடிய அதிவெப்பச்
உயரம் என்ன? [3 அடி]

9. α என்ற ஆரத்தைவுடைய வழவழப்பான வட்ட வளைவத்தின்
உட்புறத்தின் வழியே, அதன் அடிப்புள்ளியிலிருந்து $\sqrt{\frac{7\alpha g}{2}}$ எனும்
திசைவேகத்துடன் ஒரு துசன் ஏவப்படுகிறது. அத் துசன் $\frac{3\alpha}{2}$
உயரத்தை அடைந்த பின்னர், வட்டத்தைவிட்டு விவகி மீண்டும்
ஏவுதானத்தை அடைகிறது எனக் காட்டுக.

10. α ஆரமுடைய வட்ட வளைவத்தின் உட்புறமாக, அடிப்புள்ளி
யிலிருந்து $\left(\frac{\alpha g}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{4+3\sqrt{3}}$ வேகத்துடன் ஒரு துசன் ஏற்படு
கிளர்தது. அது எங்கு வட்டத்தைவிட்டு விவகிச் செல்லும் எனக்
கணக்கிடுக.

அது மறுபடியும் வளைவத்தை, கிடைதள மட்டத்தில் உள்ள
விட்டத்தின் ஒரு முனையில் வந்தடையும் எனக் காட்டுக.

[உச்சிப் புள்ளியிலேயே செல்லும் ஆரத்திலிருந்து, 30° கோணத்
திசையில்]

11. α ஆரமுடைய வழவழப்பான வட்ட வளைவத்தின் உட்புறத்
தில் அடிப்புள்ளியிலிருந்து ஒரு துசன் ஏவப்படுகின்றது. வட்டப்
பாதையைவிட்டு விவகிய பின்னர் அது வட்ட மையத்தின் வழியே
செல்வக்கடும் எனில், அதன் தொடக்கத் திசைவேகம் $(\sqrt{3}+1)\sqrt{\frac{\alpha g}{2}}$
எனக் காட்டுக.

12. α ஆரமுடைய வழவழப்பான வட்ட வளைவத்தின் உட்புறத்
தில் அடிப்புள்ளியிலிருந்து u வேகத்துடன் ஏவப்படும் துசன்,
உச்சிப் புள்ளியை அடைய முன்பே, வளைவத்தைவிட்டு விவகிவகி
 $2g < u^2 < 5g$ எனக் காட்டுக. அவ்வசது விவகிச் செல்லும் பரவளை
வின் செவ்வகவம்

$$\frac{2(u^2 - 2g\alpha)^3}{27g^3\alpha^2}$$

எனவும் காட்டுக.

13. ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து 2 மீட்டர் நீளமுள்ள மெல்
லிய தூவால் தொங்கவிடப்பட்டுள்ள ஒரு துசன் கிடைதள வேகத்

துடன் ஏயப்பட்டு, அடிப் புள்ளியிலிருந்து 3 மீட்டர் உயரத்தில் இருக்கும்போது! தூசி தளர்த்துவதிடுகின்றது. அதற்கும் மேலி தூசை 5 மீட்டர் உயரம் சென்றும் எனக் காட்டுக.

[குறிப்பு: $\cos \theta = \frac{1}{2}$ $\theta = 60^\circ$

வட்டத்தையிட்டு விளக்கும்போது வேகம் v எனில்

$$mg \cos 60 = \frac{mv^2}{r}; v^2 = 32$$

மின்வேகத்துடன், 60° எதிர்கோணத்தில் அது சாதாரண ஏவுகணையாக விபங்குகின்றது. இதற்கும் மேலி h

$$\text{உயரம் சென்றும் } h = \frac{v^2 \sin^2 \theta}{2g} = \frac{32 \sin^2 60}{2 \times 32} = \frac{3}{2} = 1.5 \text{ மீட்டர்}]$$

14. ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து α தீர்மானம் மெல்லிய தூளாக தொங்கவிடப்பட்டுள்ள ஒரு தூசை $\sqrt{ag \left(2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)}$ எனும் கிடைதள வேகத்துடன் ஏயப்படுகிறது. உச்சிப் புள்ளி வழியே சென்றும் ஆரத்திலிருந்து 30° கோணத் தொலைவில் மூதல் மூதலாகத் தொங்கவை அடைபும் எனக் காட்டு.

தூசி கிடைதளத்தில் அமையும்போது, தூசி மறுபடியும் இறுக்கத்தை அடைகின்றது என்றும் பிறகு கோணவேகம் $\cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ இருக்கும்போது மறுபடியும் தளர்த்துவதிடுகின்றது என்றும் காட்டுக.

15. ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து α தீர்மானம் தூளாக தொங்க விடப்பட்டுள்ள, n திணிவு உட்கு ஒரு தூசை, சரியாக வட்டத்தில் சுற்றிவரக் கூடிய அளவு, கிடைதள வேகத்துடன் செயல்படுகிறது. தூசின் திசைமாற்றக்கதையையும், தூசின் இழைநிலையையும், கீழ்க்கண்ட புள்ளிகளில் காண்க.

(i) உச்சப்புள்ளி

(ii) அடிப்புள்ளி

(iii) சரிமையத்தில் உட்கு புள்ளி

$$[(i) v = \sqrt{ag} \quad T = 0$$

$$(ii) v = \sqrt{2ag} \quad T = 6mg$$

$$(iii) v = \sqrt{3ag} \quad T = 3mg.]$$

16. ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து α தீர்மானம் கவிற்ருல் தொங்க விடப்பட்டுள்ள ஓர் எடை மிக்க தூசை ஒன்று $\sqrt{6ag}$ எனும் கிடை

தன வேகத்துடன் ஏவப்பட்டுச் செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த ஒரு வட்டத்தில் சுற்றி வருவதும், கயிறு கிடைமட்டத் திசையில் நிரூபிக்கும் போது உட்குள் நிரூபிசை, துகள் உச்சிப்புள்ளியில் நிரூபிக்கும்போது உட்குள் நிரூபிசையைப்போல் தளக்கு மடங்கு எனக் காட்டுக.

17. W எடைபுள்ள ஒரு துகள், ஒரு கயிற்றின் ஒரு முனையில் கட்டப்பட்டு, மற்றமுனைய நிலையாகக்கொண்ட செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த வட்டப்பாதையில் அமைகின்றதும், துகள் உச்சிப்புள்ளியிலிருந்தும், அடிப்புள்ளியிலும் நிரூபிக்கும்போது, கயிற்றின் நிரூபிசை முறையே nW , nW .

$$n = m+6$$

எனக் காட்டுக.

18. ஓர் எடை மிக்க துகள், ஒரு கயிற்றின் முனையில் கட்டப்பட்டு, செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த வட்டப்பாதையில் வளைவாக வருகின்றது. ஒரு விட்டத்தின் இரு முனைகளிலும் துகள் நிரூபிக்கும் போது உட்குள் நிரூபிசைகளின் கூட்டுத்தொகை, எந்த விட்டத்தை எடுத்துக்கொண்டாலும் ஒன்றே எனக் காட்டுக.

19. 2 அடி நீளமுள்ள கயிற்றின் முனையில் கட்டப்பட்ட ஓர் எடை மிக்க துகள், சமநிலையிலிருந்து ஏவப்பட்டு, ஒரு செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த வட்டத்தில் சுற்றிவருகிறது. உச்சிப்புள்ளியில் நிரூபிக்கும் கணத்தைப்போல், அடிப்புள்ளியில் நிரூபிக்கும் கணத்தில் நிரூபிசை மூன்று மடங்கானால், தொடக்கத் திசையேகம் என்ன?

20. ஓர் ஆகாயவரிமானம் செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த வட்டப் பாதையில் சுற்றிவருகிறது. பாதையின் ஆரம் 200 சென்டீ. கீழ் விட்டத்தில் உட்குள் புள்ளியில் ஆகாயவரிமானம் தவிர்க்க 120 எம். /மணி வேகத்தில் சென்றுகொண்டிருந்தால், 150 பவு. எடைபுள்ள மனிதன், நிரூபிசையைவிட்டுக் கீழே விழாமல் நிரூபிசையேண்டிய விசை என்ன?

[392 பவு. எடை]

21. ஒரு வழுவுழர்பான வட்டவளைத்தின் உப்புறம் ஒரு துகள் அடிப்புள்ளியிலிருந்து ஏவப்பட்டு அது சிவக உச்சிப்புள்ளியை அதன் அடைபுறமாய் தொடக்கத் திசையேகம் அமைந்துள்ளது. அநுந்தம் எதிர்க்குதியை அடையும்போது நேரம் $\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \log (\sqrt{5} + \sqrt{6})$ எனக் காட்டுக.

22. ஒரு கயிற்றின் முனையில் கட்டப்பட்ட W எடைபுறைய ஒரு கல், செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த வட்டப்பாதையில் சுற்றி

வருகின்றது. அதன் திசையோசத்தில் உச்ச மதிப்பு (மீப்பெரு); அதன் மிகக் குறைந்த மதிப்பைக்காட்டிலும் மிகு மடங்கு எனில், கணித விடையட்டத்தில் மிகுக்கும்போது, அதன் மிகுவிமை $10\frac{W}{3}$ எனக் காட்டுக.

23. ஒரு துகள், செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த வட்டவடிவமான குழாய்க்குள் சுற்றிக்கொண்டு மிகுக்கின்றது. அதன் மீப்பெரு வேகம், மீச்சிறு வேகத்தைப்போல் 3 மடங்கு எனில், துகள் செங்குத்துத் திசையில் தகரும்போது, துகள் குழவின்மீது செலுத்தும் அழுத்தமும், அது அடிப்புள்ளியில் மிகுக்கும்போது செலுத்தும் அழுத்தமும் 5 : 11 என்ற விகிதத்தில் அமைமும் எனக் காட்டுக.

24. ஒரு மீச்சக்தி உடைய கயிற்றின் சாதாரண நீளம் 5 அடி-7 படி. மிகுவிமையால் அது ஒர் அடி நீளக்கூடும். அதன் ஒரு முனைவை நிலையாக்கிகொண்டு, மறுமுனையில் கட்டப்பட்ட 2 படி-சுடை, 20-அடி/வி. எழும் சீரான வேகத்துடன் செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த வட்டத்தில் சுற்றிவருகின்றது. அதன் அடிப்புள்ளியிலும், உச்சிப்புள்ளியிலும் கயிற்றின் திசைகள் என்ன? (6-3 அடி, 6-3 அடி)

25. ஒர் அலைவு இயக்கம்பெறும் ஊசலின், அடிப்புள்ளியில், கயிற்றின் மிகுவிமை, குண்டின் மிகுவிமைகையப்போல் n மடங்கு ($3 > n > 1$) ஊசல், அலைவியக்கம் பெறும் கோணம் θ ,

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{3-n}{2}$$

எனும் சமன்பாட்டால் கொடுக்கப்படுகின்றது எனக்காட்டுக.

26. ஒர் செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த, 2*d* கோணம் தாக்கும் α ஆரமுள்ள வட்டவியலின் மேல் n திணிவு உடைய ஒரு துகள் அலைவியக்கம் பெற்றிருக்கிறது. ஏதாவது ஒரு புள்ளியில் அழுத்தம் $mg \left(\frac{3v^2}{2gd} + 1 \right)$ எனில், (v -திசைவேகம்), $\alpha = \frac{\pi}{3}$ எனக் காட்டுக.

27. ஒர் ஊஞ்சல், நிலையாக மிகுக்கும்போது ஒரு மணிதலின் மிகு மடங்கு எடைவைத் தாங்கக்கூடும். அவன் ஆடக்கூடிய உச்ச கோணத் தூரம் என்ன. [120°]

28. ஒரு செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த வட்டத்தில் உடனே மிகுக்கும் ஒரு துகள் கிடைமட்டத்தில் உடன விட்டதைச் சற்றே எட்டப்பிடிக்கும். பாதையில் எந்த ஒரு புள்ளியிலும், அழுத்தம்

அம் விட்டத்திற்குக் கீழே உள்ள ஆழத்தின் விசிறத்தில் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

29. ஒர் எடை மிக்க துகள், α தீளமுள்ள கயிற்றின் முனையில் தொங்கவிடப்பட்டு, கிடைமட்டத்தில் $\sqrt{2gh}$ திசைவேகத்துடன் ஏயப்படுகிறது.

(i) துகள் விட்டத்தில் முழுக்கற்றும் சுற்றியந்தால், குறைந்த பட்சம் h -ன் மதிப்பு $\frac{5\alpha}{2}$ என்றும்

(ii) கயிறு தொய்த்துவிட்டால் $\alpha < h < \frac{5\alpha}{2}$ என்றும், நித் தீளையில் துகள் ஏவுதாளத்தில் இருந்து செல்லக்கூடிய உச்ச உயரம்

$$\frac{(4\alpha - h)(\alpha + 2h)^2}{27\alpha^2}$$

எனவும் காட்டுக.

30. செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த வழுவுறப்பாள ஒரு வட்ட வளைவத்தின்மேல், உச்சிப்புள்ளியில் ஒய்விருந்து புறப்பட்டு வெளிப்புறத்தில் நழுவும் ஒரு துகளும், அடிப்புள்ளியில் புறப்பட்டுச் செல்லாத உச்சிப்புள்ளியை உட்புறமாக அடைவக்கூடிய அளவு கிடைதள திசைவேகத்துடன் ஏயப்பட்ட துகளும், விட்டப்பாதையை விட்டு விளகிச்செல்லும் புள்ளி ஒன்றே என்றும், அவை ஒரே பரவலையின் பகுதிகளில் செல்லும் எனவும் காட்டுக.

31. M திணிவு உடைய ஒரு பந்து, செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்த ஒரு வட்ட வடிவமான குழாயின் அடிப்பகுதியில் இருக்கின்றது. m திணிவு உடைய மற்றொரு பந்து குழாயின்வழியே நழுவி அதன் மேல் மோதுகின்றது. மீட்சிக்குணகம் M எனில், அவை அடுத்த முறை மோதிய பிறகு குழாய்க்குள் அவை செல்லும் உயரங்கள் $\frac{M^2}{(M-m)^2}$ எனும் விசிறத்தில் அமைபும் எனக் காட்டுக.

32. AB என்பது O -வைத் தாழ்த்த புள்ளியாகக்கொண்ட ஒரு செங்குத்து விட்டத்தின் கிடைதள விட்டம். m_1 என்ற திணிவு உடைய ஒரு துகள் விட்டத்தின் உட்புறத்தின் வழியே A -ல் இருந்து புறப்பட்டு O -யில் வைக்கப்பட்டுள்ள m_2 ($> m_1$) என்ற திணிவை அடைய துகளுடன் மோதுகிறது. இரு பொருள்களும் முழு

மிட்சுபுதலானவாக இருப்பின், அவை செல்லும் உயரங்களைக் கணக்கிடுக.

[வட்டத்தின் ஆரம் a எனில்,

$$\frac{4am_1^2}{(m_1+m_2)^2}, \frac{a(m_1-m_2)^2}{(m_1+m_2)^2}]$$

33. AB என்பது O -வைத் தாழ்த்த புள்ளியாகக்கொண்ட ஒரு செங்குத்து வட்டத்தின் கிடைதள விட்டம். m_1 திணிவு உடைய பொருளும், m_2 திணிவு உடைய பொருளும், விட்டத்தின் ஒர்ப்பொரு ழுளியில் இருந்து ஒரே சமயத்தில் தழுவ ஆரம்பிக்கின்றன. அவை மூன்று மிட்சுபுதலானவாக இருப்பின், O -யில் மேதத்கொண்டபின் அவை செல்லும் உயரங்களை

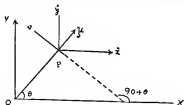
$$(3m_2-m_1)^2 : (3m_1-m_2)^2$$

எனும் விகிதத்தில் அகையும் எனக் காட்டுக.

9. மைய விசைகள்—மைய ஒழுக்குகள் (Central forces and Central Orbits)

9-1. சமதளத்தில் அமைந்த ஒரு துகளின் இயக்கத்தை மூன்று காட்சியாகக் குத்திக் கூறுகின்றனவென்று பார்த்தோம். ஒரு துகளின் இயக்கத்தைக் கணக்கிட ஏதாவது மீண்டு குத்தத் திசைகளைக் கொள்ளலாம். இங்கு கோண தூரக் கூறுகின்றனவென்று பார்ப்போம். அப்போது துகளின் இயக்கத்தை ஆகார முடுக்கம், குறுக்கு முடுக்கம் (Transverse acceleration) இவற்றைக் கொண்டு கண்காணலாம்.

§ 9-2. கோணத் திசைக் கூறுகளில் திசைவேகமும், முடுக்கமும்



படம் 97.

ஒரு வளைவின்மேல், t என்ற நேரத்திற், துகளின் நிலை P -ஆக இருக்கட்டும். P -ன் காட்சியைக் கூறுகள் (x, y) எனவும், கோணத் தூரக் கூறுகள் (r, θ) எனவும் கொண்டால்

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

P -ன் திசையெக்தரின் பிரிவுகள் OP வழியே u எனவும், OP -க்குத் குத்தாக θ அளிக்கப்படும் திசையில் v எனவும் கொள்வோம். OX , OY திசைகளில் அப்பிரிவுகள் \dot{x} , \dot{y} ஆகும்.

OX வழியே u , v -ஐப் பிரிப்போமானால்,

$$u \cos \theta + v \cos (90^\circ + \theta) = \dot{x}$$

OY வழியே பிரிப்போமானால்,

$$u \sin \theta + v \sin (90^\circ + \theta) = \dot{y}$$

ஆகவே,

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} (r \cos \theta) = \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \cdot \dot{\theta}$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} (r \sin \theta) = \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \cdot \dot{\theta}$$

எனவே,

$$u \cos \theta - v \sin \theta = \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \cdot \dot{\theta} \quad \dots \quad (1)$$

$$u \sin \theta + v \cos \theta = \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \cdot \dot{\theta} \quad \dots \quad (2)$$

(1) $\times \cos \theta$ + (2) $\times \sin \theta$

$$u (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \dot{r} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$\therefore u = \dot{r}$$

(1)-ல் $u = \dot{r}$ எனப் பிரதியிடுவோம்,

$$v = r \dot{\theta}$$

இதேபோலவே P -ன் மூடுக்தரின் பிரிவுகள் OP வழியே f_1 எனவும், OP -க்குத் குத்தாக θ அளிக்கப்படும் போக்கில் f_2 எனவும் கொள்வோம். OX , OY திசைகளில் அப்பிரிவுகள் \ddot{x} , \ddot{y} ஆகும்.

OX வழியே f_1 , f_2 இவற்றைப் பிரிப்போமானால்

$$f_1 \cos \theta + f_2 \cos (90^\circ + \theta) = \ddot{x}$$

OY வழியே பிரிக்க,

$$f_1 \sin \theta + f_2 \sin (90^\circ + \theta) = \ddot{y}$$

ஆகவே,

$$\ddot{x} = \frac{d^2}{dt^2} (r \cos \theta)$$

$$= \ddot{r} \cos \theta + 2\dot{r} (-\sin \theta \cdot \dot{\theta}) + r(-\sin \theta \cdot \ddot{\theta} - \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2)$$

$$\ddot{y} = \frac{d^2}{dt^2} (r \sin \theta)$$

$$= \ddot{r} \sin \theta + 2\dot{r} (\cos \theta \dot{\theta}) + r (\cos \theta \ddot{\theta} - \sin \theta \dot{\theta}^2)$$

எனவே,

$$f_1 \cos \theta - f_2 \sin \theta = \cos \theta \cdot (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) - \sin \theta (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \dots (3)$$

$$f_1 \sin \theta + f_2 \cos \theta = \sin \theta (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + \cos \theta (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \dots (4)$$

மேம்பாடுகள் (3), (4)-ஐத் தீர்க்க,

$$f_1 = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$f_2 = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

$$f_2 = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta})$$

குறிப்பு 1 : OP -ன் திசை ஆளத்திசை எனவும், OP -க்குத் குத்தாக $(\theta$ அநிசரிக்குமாறு) உள்ள திசை குறுக்குத் திசை எனவும் கூறப்படும்.

	மதிப்பு	திசை	பொருள்
ஆளத் திசையெண்	\dot{r}	ஆள வரிசை	r அநிசரிக்கும் திசையில்
குறுக்குத் திசையெண்	$r\dot{\theta}$	ஆளக்குத் குத்தாக அநிசரிக்கும்	பொருளின்
ஆள முடுக்கம்	$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$	ஆள வரிசை	r அநிசரிக்கும் திசையில்
குறுக்கு முடுக்கம்	$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta})$	ஆளக்குத் குத்தாக அநிசரிக்கும்	பொருளின்

குறிப்பு 2 : துகள் a ஆளமுடைய ஒரு வட்டப்பாதையில் வியக்குமேயானால்

$$r = a \text{ (மாறாதது)} \therefore \dot{r} = 0 \quad \ddot{r} = 0$$

எனவே,

$$\text{ஆள முடுக்கம்} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -a\dot{\theta}^2$$

$$\text{குறுக்கு முடுக்கம்} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = \frac{1}{a} \frac{d}{dt} (a^2 \dot{\theta}) = a \ddot{\theta}$$

துகள் ஸ்டீடத்தில் மிவங்கும்போது,

$$\text{தொடுகோட்டு முடுக்கம்} = a \ddot{\theta}$$

$$\text{மீள் முடுக்கம்} = a \ddot{\theta}^2 \quad (\text{மையத்தை நோக்கி})$$

§ 3-3. ஆரத்திசையில் முடுக்கச்சக்தி

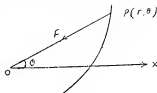
ஒரு துகள், நிலையான ஒரு புள்ளியை நோக்கியோ, அல்லது அப் புள்ளிக்கு நேர் எதிராகவோ செயற்படும் ஒரு விசையின் சக்தியால் (P) மிவங்கும்போது, அது செல்லும் பாதையை மைய ஒழுக்கு (Central orbit) என்கிறோம். துகள் ஆரத்திசையில் முடுக்கம் உடையதாக இருக்கிறது. விசை மையமுடுக்கம் என்கிறோம். இந்த முடுக்கத்தை உண்டாக்கும் விசையை, மையவிசை என்றும், அந் நிலையான புள்ளியை விசையையம் என்றும் குறிக்கிறோம்.

பொதுவாக மையவிசை, விசைமையத்திலிருந்து துணுக்கு உள்ள தூரத்தை மட்டும் சார்ந்திருக்கிறது. அவ்வித மியக்கம் O வழியே செல்லும் ஒரு தளத்திலேயே இருக்கும்: விசைமையம் O என்றால், t நேரத்தில் துகளின் நிலை P ஆக இருக்கட்டும். தொடுகோடு PT துகளின் அப்போதைய மியக்கவிசை. அக் கணத்தின் OPT தளத்திற்கு குத்தான திசையில், திசைவேகத்தின் பரிவு பூச்சியமாகும். மேலும் துகளின் மேல் மிவங்கும் ஒரே விசையான மையவிசை PO அல்லது OP திசையில் செயல்படுகிறது. ஆகவே OPT தளத்திற்குக் குத்தான திசையில், எவ்வித விசையும் இல்லை; ஆகவே, அங்கு எவ்வித முடுக்கமும் இல்லை; எனவே அங்கு எவ்விதத் திசைவேக மாறுதலும் இல்லை. அவ்வாறே ஒவ்வொரு கணத்திலும், துகள் OPT எனும் தளத்திலேயே மிவங்குகிறது. ஆகவே, துகளின் மியக்கம் சமதளத்தின் அமைந்த ஒரு மையஒழுக்கு ஆகும். இந்த வளைவின் பரப்புவேகம் நிலையானது என்று பின்னர் பார்ப்போம்.

§ 3-4. மைய ஒழுக்கின் வகைக்கெழு சமன்பாடு (Differential equation of Central Orbita)

ஒரு துகள், சமதளத்தில், அதன் முடுக்கம் எப்போதும் ஒரு நிலையான புள்ளி O -ஐ நோக்கி இருக்குமாறு மியக்கப்படுகிறது; அதன் பாதையின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காணலாம்.

O -ஐ ஆதிவாகவும், O வழிச்செல்லும் ஒரு நிலையான கோடான OX -ஐ தொடக்கக் கோடாகவும் செல்குவோம்.



படம் 98.

துகளில் திணிவு m எனவும், t நேரத்தில் அதன் நிலையின் கோணத் தூரக் கூறுகள் (r, θ) எனவும் இருக்கட்டும். F ஊமயத்தை நேரக்கிய முடுக்கமாக இருக்கட்டும்.

நியூட்டனின் சமன்பாடுகளை எழுத,

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -mF$$

$$\therefore \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -F \quad \dots\dots(1)$$

$$m \cdot \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \quad \dots\dots(2)$$

[குறுக்கு முடுக்கம் பூச்சியமானதால், குறுக்குத் திசையில் விசையும் பூச்சியமாகும்]

சமன்பாடு (2)-ல் இருந்து,

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

$$\therefore r^2\dot{\theta} = \text{மாறா எண்} = h \text{ என்போம்} \quad \dots\dots(3)$$

பாதையைக் குறிப்பிட (2), (3) சமன்பாடுகளிலிருந்து t -ஐ நீக்கி, r, θ இவற்றிடையே ஒரு தொடர்பைக் காணவேண்டும். இதற்கு வசதியாக இருக்க,

$$r = \frac{1}{u} \text{ என்போம்}$$

$$(3)\text{-ல் இருந்து } \dot{\theta} = \frac{h}{r^2} = hu^2$$

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2} \dot{u}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \\
 &= -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} h u^2 \\
 &= -h \frac{du}{d\theta} \\
 \therefore \ddot{r} &= \frac{d}{dt} \left(-h \frac{du}{d\theta} \right) \\
 &= -h \frac{d}{d\theta} \left(\frac{du}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dt} \\
 &= -h \frac{d^2 u}{d\theta^2} \cdot h u^2 \\
 &= -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}
 \end{aligned}$$

சமன்பாடு (1)-ல் இருந்து,

$$-h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - \frac{1}{u} h^2 u^4 = -F$$

$$h^2 u^2 \left[\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right] = F$$

$$\therefore \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{h^2 u^2} \quad \text{---(4)}$$

இதனால் கோணத்தொகை கூறுகளில் ஈழை ஒழுக்கில் வரைக கெழுச் சமன்பாடு.

குறிப்பு 1: ஈழைமூடுக்கம் F , விசைமையத்திலிருந்து எதிராகச் செயற்பட்டால், வரைக்கெழுச் சமன்பாடு

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{F}{h^2 u^2}$$

ஆகும்.

குறிப்பு 2: கொடுக்கப்பட்ட ஈழை மூடுக்கத்தை (F) உடைய ஒழுக்கு h -ன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு வெவ்வேறாகும். ஆகவே ஒழுக்கில் சமன்பாட்டைக் காண h -ன் மதிப்பை நாம் தொடக்கத்திலேயே அறிவவேண்டும்.

குறிப்பு 3 : துகளின் திசையேகம் v இக் காண,

$$\begin{aligned} v^2 &= (\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2 \\ &= \left(-h\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{u^2}(h^2u^4) \end{aligned}$$

$$\therefore v^2 = h^2 \left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 \right] \quad \dots\dots(5)$$

குறிப்பு 4 : P -ல் வளைவிற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோட்டிற்கு, O -ல் இருந்து வரையப்படும் குத்துக்கோட்டின் தீளம் p எனில்

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^2} &= \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \quad (\text{வளை துண்கணிதம் பார்க்க}) \\ &= u^2 + u^4 \left(-\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta}\right)^2 \\ &= u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 \\ \frac{1}{p^2} &= \frac{v^2}{h^2} \end{aligned}$$

$$\therefore h = up \quad \dots\dots(6)$$

h கெடும் உத்தத்திறைக் குறிக்கின்றது.

§ 9.4. (2) ஹய ஒழுக்கின் பாத வரைச் சமன்பாடு (Pedal equation of a Central orbit)

P எனும் புள்ளியில் வளைவிற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டிற்கு, O -ல் இருந்து வரையப்படும் குத்துக் கோட்டின் தீளம் p எனில்,

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^2} &= \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \\ \therefore \frac{1}{p^2} &= u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 \quad \left[\because r = \frac{1}{u}\right] \quad \dots\dots(7) \end{aligned}$$

(7)-ன் இருபக்கத்திற்கும் θ இல் பற்றி வகைக்கொழு காண

$$\begin{aligned} -\frac{2}{p^3} \cdot \frac{dp}{d\theta} &= 2u \frac{du}{d\theta} + 2 \frac{du}{d\theta} \cdot \frac{d^2u}{d\theta^2} \\ &= 2 \frac{du}{d\theta} \left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right) \quad \dots\dots(8) \end{aligned}$$

ஆனால் (4) ல் இருந்து

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{h^2 u^2}$$

ஆகவே (3) ஐ மாற்றி எழுத

$$-\frac{1}{p^3} \frac{dp}{d\theta} = \frac{F}{h^2 u^2} \frac{du}{d\theta}$$

$$-\frac{1}{p^3} dp = \frac{F}{h^2 u^2} du$$

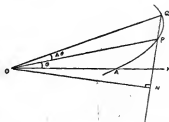
$$= \frac{F}{h^2} r^2 d\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$= \frac{F r^2}{h^2} \left(-\frac{1}{r^2}\right) dr = -\frac{F}{h^2} dr$$

$$\therefore \frac{h^2}{p^3} \frac{dp}{dr} = F$$

.....(9)

§ 9.5. பரப்பளவு வேகம் (Areal velocity)



படம் 99.

ஒரு நிலையான புள்ளியையும், இக்கோணம் நிலைக்கும் கோடு, இக்கோணம் நிலைக்கும் புள்ளியையும் பரப்பளவின் மாறுவீதத்தைப் பரப்பளவு வேகம் என்கிறோம். / 7.

துகள், C எனும் மாதனத்தில் அமைந்த வரையின்மேல் இயக்கு கிறது. O -தளத்தில் உள்ள நிலையான புள்ளி. A ஆரம்பக் காலத்தில் துகளின் இருப்பிடம்.

P, Q முறையே $t, t + \Delta t$ நேரத்தில் துகளின் நிலைகள்.

$A, A + \Delta A$ முறையே AOP, AOQ இவற்றின் பரப்புகள்

ஆர்த்நிறை POQ -ன் பரப்பு $= \Delta A$. இது Δt நேரத்தில் உருவாக்கப்பட்டது.

ஆகவே துகள் P -ல் இருக்கும்பொழுது,

$$\text{பரப்பளவின் மாறு வீதம்} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \dot{A}$$

இதைப் பரப்பளவு வேகம் என்கிறோம். இதைக் கோணத்தூரக் கூறு எனில் பெறலாம்.

$$\text{பரப்பு } OPQ = \Delta OPQ\text{-ன் பரப்பு (ஏறக்குறைய)}$$

$$= \frac{1}{2} OP \cdot OQ \cdot \sin \angle POQ$$

$$= \frac{1}{2} r (r + \Delta r) \sin \Delta \theta$$

$$= \frac{1}{2} r (r + \Delta r) \Delta \theta \quad [\because \sin \Delta \theta \approx \Delta \theta]$$

$$= \frac{1}{2} r^2 \Delta \theta \quad [\Delta r \cdot \Delta \theta \text{ எனும் விகச் சிறிய அளவை ஒதுக்கியிட}]$$

$$\therefore \dot{A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

$$\text{பரப்பளவு வேகம்} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

பரப்பளவு வேகத்தினை, துகளின் திசைவேகத்தினைச் சார்ந்தும் பெறலாம். வில் $AP = s$, வில் $AQ = s + \Delta s$ எனில், PQ எனும் வில்வின் நீளம் Δs .

ON, PQ -க்கு வரையப்பட்ட குத்துக்கோடு.

$$\text{ஆர்த்நிறை } POQ\text{-ன் பரப்பு} = \Delta POQ\text{-ன் பரப்பு (கூறாக்க)}$$

$$= \frac{1}{2} PQ \cdot ON$$

$\Delta t \rightarrow 0$ எனில், Q, P நேருக்கிவந்து, QP எனும் நான், P -ல் வரையப்பட்ட தொடுகோடு ஆகும்.

ON = நித்தத் தொடுகோட்டுக்கு O -ல் இருந்து வரையப்பட்ட குத்துக்கோடு; $ON = p$ எனில்,

$$\begin{aligned}\text{பரப்பளவு வேகம்} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot p \\ &= \frac{1}{2} p \frac{ds}{dt} \\ &= \frac{1}{2} pv \quad (v, \text{ துகளின் திசைவேகம்})\end{aligned}$$

$$\therefore \text{பரப்பளவு வேகம்} = \frac{1}{2} pv$$

குறிப்பு 1: (x, y) , $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ முறையே P , Q -ன் அடுத்த தூரங்கள் எனில்,

$$\begin{aligned}\text{பரப்பளவு வேகம்} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta OPQ}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{[x(y + \Delta y) - y(x + \Delta x)]}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{[x \cdot \Delta y - y \cdot \Delta x]}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{2} \left[x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right].\end{aligned}$$

குறிப்பு 2: வளைவு ஒரு வட்ட ஒழுக்காக இருந்தால்,

$$r^2 \dot{\theta} = h$$

$$\therefore h = 2 \text{ (பரப்பளவு வேகம்)}$$

h நிலையான மதிப்பு உண்மையாகவோ, பரப்பளவு வேகத்தின் மதிப்பும் நிலையானதாகும். அதாவது

சமமான நேரங்களில், சம அளவுள்ள
பரப்பைத்தான், துகளின் ஆரக்கோடு
உண்டாக்குகிறது,

எனக் காண்கிறோம்.

$$\text{மேலும் பரப்பளவு வேகம்} = \frac{1}{2} h = \frac{1}{2} pv$$

$$\therefore h = pv \quad (\text{மையபாடு 632 பார்ச்சு})$$

$$v = \frac{h}{p}$$

ஆகவே, துகளின் வேகம், தொடுகோட்டிற்கு மையத்திலிருந்து வரையப்பட்ட ரூத்துக் கோட்டிற்கு எதிர்விதத்தில் உள்ளது என்றும் காண்கிறோம்.

8-6. கவியம் (Apsis)

மைய ஒழுக்கின்மேல் அமைந்த A எனும் புள்ளியில், திசைவேகம், OA எனும் ஆரத்திற்கு ரூத்தாக இருந்தால், A-ஐக் கவியம் என்றும், OA-ஐ கவியக்கோடு (apsis line) என்றும் சொல்கிறோம். ஆகவே, கவியப் புள்ளியில் துகள், ஆரத்திற்கு ரூத்தான திசையில் நிகழ்கிறது.

$$\frac{1}{p^2} = u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2$$

என அறிவோம். நிகழ் $u = \frac{1}{r}$; p , O-ல் இருந்து தொடுகோட்டுக்கு வரையப்பட்ட ரூத்துக் கோட்டின் நீளம்.

கவியப் புள்ளியில்

$$p = r = \frac{1}{u}$$

$$\therefore \frac{du}{d\theta} = 0$$

\therefore கவியப் புள்ளியில் $\frac{du}{d\theta} = 0$. எனவே அப்புள்ளியில் u மீட்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புடைய அடையக்கூடும்.

எனவே கவியப் புள்ளியில், r -ன் மதிப்பு, அதன் மீச்சிறு அல்லது மீட்பெரு மதிப்பாகும்.

8-7. மைய ஒழுக்கில் இருவகைக் கணக்குகள்

ஒரு துகள் மையத்தை நோக்கிச் செயற்படும் முடுக்கத்துடன் கூடிய கணக்குகளை இருவகையாகப் பிரிக்கலாம்.

(i) பாதை சொடுக்கப்பட்டிருக்கும்; விசையின் விதியைக் காணவேண்டும்.

(ii) விசையின் விதி கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்; பாதையைப் பெறவேண்டும்.

முதல் வகைக் கணக்குகளில், பாதை கொடுக்கப்பட்டிருப்பதாக, u , θ -க்கு விடையே உள்ள தொடர்பு கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{h^2u^2}$$

$$\therefore F = h^2u^2 \left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2} \right)$$

எனவே பாதையின் சமன்பாட்டில் வகைக்கெழுக்கோடு, பிரதியீடு செய்ய, F விடைக்கும்.

நிரண்டாவது வகைக் கணக்குகளில், விசையின் விதி, அதாவது F -ஐ அறிவோம். u , θ -க்கு விடையே உள்ள தொடர்பைக் காண வேண்டும்.

கமவு ஒழுக்கியின் வகைக்கெழுத் சமன்பாடு,

$$u + \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{F}{h^2u^2} \quad \dots\dots\dots(1)$$

இதன் நிர்ணயக்காண

(1) முதலில் இரு பக்கங்களையும் $2 \frac{du}{d\theta}$ ஆல் பெருக்க வேண்டும்.

(2) இரு பக்கங்களிலும் θ -வைப் பொறுத்த தொகைக்கெழு காணவேண்டும்.

அதாவது,

$$2 \frac{du}{d\theta} \cdot u + 2 \cdot \frac{du}{d\theta} \cdot \frac{d^2u}{d\theta^2} = 2 \frac{F}{h^2u^2} \frac{du}{d\theta}$$

$$\frac{d}{d\theta} (u^2) + \frac{d}{d\theta} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 = \frac{2F}{h^2u^2} \frac{du}{d\theta}$$

$$\therefore u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 = \int \frac{2F}{h^2u^2} du + A \dots\dots\dots(2)$$

தொடக்க நிலைகளில் இருந்து, A -ன் மதிப்பைக் கலப்பாகப் பெறலாம்.

A -ன் மதிப்பைக் கண்ட பிறகு, சமன்பாடு 2-ன் தொகைக் கெழு காண, u , θ இவற்றிற்கிடையே ஆன தொடர்பைப் பெறலாம்.

9-8. ஊய ஒழுக்கு நீள்வளைப்பு (Conic) பாதையாக இருக்கும் போது விசையை இயக்கும் விதி

ஒரு தூள், சூரியத்தை நோக்கிச் செயல்படும் ஒரு விசையின் கீழ், நீள்வளைப்பு பாதையில் செல்கிறது. அம் விசையின் விதிவைக் காண்போம்.

சூரியத்தை ஆதியாகக் கொண்டு, பேரச்சைத் தொடக்கக் கோடாகக் கொண்ட நீள்வளைப்பு பாதையின் சமன்பாடு,

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$$

$$lu = 1 + e \cos \theta \quad \left[\because r = \frac{1}{u} \right]$$

$$l \frac{du}{d\theta} = -e \sin \theta$$

$$l \frac{d^2u}{d\theta^2} = -e \cos \theta$$

ஊய ஒழுக்கின் வகைக்கெழுத் சமன்பாடு

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{h^2u^2}$$

$$\therefore \frac{F}{h^2u^2} = \frac{-e \cos \theta}{l} + \frac{1 + e \cos \theta}{l} = \frac{1}{l}$$

$$\therefore F = \frac{h^2u^2}{l}$$

$$p = \frac{h^2}{l} \text{ எனில், } F = p \cdot u^2,$$

$$\therefore F \propto \frac{1}{r^2}$$

அதாவது விசை, தலைகீழ் வர்க்க விதியின்படி இயக்குகின்றது—இது சூரியத்தை நோக்கிச் செயல்படுகிறது.

விளைத்தெற்றம் 1: திசைவேகம் v காண,

$$v^2 = h^2 \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right]$$

$$= h^2 \left[\frac{e^2 \sin^2 \theta}{l^2} + \frac{(1 + e \cos \theta)^2}{l^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{h^2}{l^2} [1 + 2e \cos \theta + e^2] \\
 &= \frac{\mu}{l} [2(1 + e \cos \theta) + e^2 - 1] \quad \because \mu = \frac{h^2}{l} \\
 &= \mu \left[\frac{2(1 + e \cos \theta)}{l} - \frac{(1 - e^2)}{l} \right] \quad \because l = a(1 - e^2)
 \end{aligned}$$

$$v^2 = \mu \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right]$$

மீதிலிருந்து துணியின் திசையையும், அது குவியத்தில் இருந்து உட்குறுத்தலைப் பொறுத்தது; அது விவக்ஷிப்பம் திசையைப் பொறுத்து மிகவும் எடை கவனிக்கிறது.

குறிப்பு: மீதேபார்வா பரவலைப்பு பாதைக்கு (Parabolic Path)

$$\frac{l}{r} = 1 + \cos \theta \quad [\because e = 1]$$

$$\text{மீதேபார்வா, } F = \frac{h^2}{l} \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

$$v^2 = \frac{2h^2}{l^2} (1 + \cos \theta)$$

$$= \frac{2h^2}{l^2} \cdot \frac{l}{r} = 2 \frac{h^2}{l} \cdot \frac{1}{r}$$

$$v^2 = \frac{2\mu}{r}$$

அதிபரவலைப்பு பாதையில் குவியத்துக்கு அருகே உட்குறுத்தல் எவ்வளவு (nearer branch of a hyperbola)

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$$

$$F = \frac{h^2}{l} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{\mu}{r^2}$$

$$v^2 = \mu \left[\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right] \quad \because l = a(e^2 - 1)$$

குவிபத்துக்கு அருகில் இல்லாத அதிபரவணியைப் பாதையின் கிளை

$$\frac{l}{r} = -1 + e \cos \theta$$

$$\therefore F = -\frac{h^2}{l} \cdot \frac{1}{r^2} = -\frac{\mu}{r^2}$$

$$v^2 = \mu \left(\frac{1}{a} - \frac{2}{r} \right)$$

இங்கு விசை, மையத்தோடு இணங்கும் கோட்டில் இருந்தாலும், மையத்தை விட்டுப்போகாது உட்கொடு. இருந்தாலும் அது தவிர வர்க்க விதியைக் கடைப்பிடிக்கின்றது.

கிளைத்தேற்றம் 2 : பாதையை ஒருமுகை சுற்றிவர எடுத்தல் கோளும் நேரம் T எனில்,

$$\begin{aligned} T &= \frac{\text{தீர்வணியப் பாதையின் பரப்பு}}{\text{பரப்பு வேகம்}} \\ &= \frac{\pi ab}{h/2} = \frac{2\pi ab}{\sqrt{\mu l}} \\ &= \frac{2\pi ab}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{a}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \left(\because l = \frac{b^2}{a} \right) \\ &= \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{காலவட்ட நேரம் } T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2}$$

9.3. விசை $\frac{\mu}{r^2}$ (தவிர்த்து வர்க்க விதி); பாதையைக் கண்டுபிடிக்க மைய ஒழுக்கின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{h^2u^2} = \frac{\mu u^2}{h^2u^2}$$

$$\frac{h^2}{\mu} = l \text{ எனில்} \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{l}$$

இதன் பொதுத் தீர்வைக் காண

$$(D^2+1)u = 0$$

$$\therefore u = A \cos(\theta - \alpha)$$

A -யும், e -ம் மாறு என்னும்.

குறிப்பிட்ட திசையைக் காண

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{1}{D^2+1} \frac{1}{l} \\ &= \frac{1}{l}\end{aligned}$$

\therefore முழுத் திசை

$$u = A \cos (\theta - \alpha) + \frac{1}{l}$$

$$lu = Al \cos (\theta - \alpha) + 1$$

$$Al = e \text{ எனில், } \frac{l}{r} = 1 + e \cos (\theta - \alpha)$$

ஆகவே, பாதை ஒரு கூம்பின் வெட்டுமுகமாக இருக்கிறது. விசை கமையம் இதன் குவியம் ஆகும். இதன் அகரச் செயலகம் $l = \frac{h^2}{\mu}$

θ -ன் மதிப்பை ஒரு கவியத்திலிருந்து மதிப்பிட, கிடை

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$$

என்றே சொன்னோம்.

முன்பு கூறிய மாதிரியே திசைவேகத்தைக் காணக்கூடும்.

$$\text{திசைவேகம் பாதைக்கு } v^2 = \mu \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right]$$

$$\text{பரவளைவுப் பாதைக்கு } v^2 = \frac{2\mu}{r}$$

அதிபரவளைவின் குவியத்துக்கு அருகே உள்ள கிளை

$$v^2 = \mu \left[\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right]$$

எனவே,

$$v^2 < \frac{2\mu}{r} \text{ எனில் திசைவேகம் பாதை}$$

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} \text{ எனில் பரவளைவுப் பாதை}$$

$$v^2 > \frac{2\mu}{r} \text{ எனில் அதிபரவளைவின் குவியத்துக்கு அருகே உள்ள}$$

கிளை ஆகும்.

தலைகீழ் வர்க்க விதி; கோள்களின் பாதை

ஒரு துகள், $\frac{\mu}{(தூரம்)^2}$ எனும் மைய முடுக்கத்தோடு இயங்குகின்றது. அதன் பாதை ஒரு கூம்பு வெட்டியில் (Conic section) அமையும் எனக் காட்டுக.

மையப் புள்ளியை நோக்கிய முடுக்கம்

$$F = \frac{\mu}{r^2}$$

மைய ஒழுக்கின் $p-r$ சமன்பாடு

$$\frac{h^2}{p^3} \frac{dp}{dr} = F = \frac{\mu}{r^2} \quad \dots\dots(1)$$

$$\therefore h^2 \frac{dp}{p^3} = \mu \frac{dr}{r^2}$$

தொகைக்கெழு காண,

$$-\frac{h^2}{2p^2} = -\frac{\mu}{r} + \text{மாறு எண்}$$

$$\therefore \frac{h^2}{p^2} = \frac{2\mu}{r} + C \quad \dots\dots(2)$$

மேலும், v என்பது r தூரத்தில் உட்கு புள்ளியில் திசைவேகம் எனில்,

$$h = pv$$

$$\therefore v^2 = \frac{2\mu}{r} + C \quad \dots\dots(3)$$

குவிவத்தை முனைவாகக் கொண்ட பரவளைவு, நீள்வட்டம், அதிபரவளைவின் பக்கத்துக் கிளை ஆகியவற்றின் $p-r$ சமன்பாடுகள்

$$\left. \begin{aligned} p^2 &= ar \\ \frac{b^2}{p^2} &= \frac{2a}{r} - 1 \\ \frac{b^2}{p^2} &= \frac{2a}{r} + 1 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(4)$$

என அறிவேகம்.

(i) பரவளைவின் சமன்பாட்டையும், சமன்பாடு (2)-ஐயும் ஒப்பிட

$$\frac{h^2}{p^2} = \frac{2p}{r} + C$$

$$p^2 = ar$$

$$\therefore C = 0$$

$$h^2 = 2pa$$

$$\therefore v^2 = \frac{2p}{r}$$

.....I

(ii) நீள்வட்டத்தின் சமன்பாட்டையும், சமன்பாடு (2)-ஐயும் ஒப்பிட

$$\frac{h^2}{p^2} = \frac{2p}{r} + C$$

$$\frac{b^2}{p^2} = \frac{2a}{r} - 1$$

$$\therefore \frac{h^2}{b^2} = \frac{2p}{2a} = \frac{C}{-1}$$

$$\therefore C = -\frac{p}{a}$$

$$h^2 = \frac{pb^2}{a}$$

$$\therefore v^2 = p \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

.....II

(iii) திணிபரவளைவின் (பக்கத்துக் கிளை) சமன்பாட்டையும், சமன்பாடு (2)-ஐயும் ஒப்பிட

$$\frac{h^2}{p^2} = \frac{2p}{r} + C$$

$$\frac{b^2}{p^2} = \frac{2a}{r} + 1$$

$$\therefore \frac{h^2}{b^2} = \frac{2p}{2a} = \frac{C}{1}$$

$$\therefore C = \frac{p}{a}$$

$$h^2 = \frac{pb^2}{a}$$

$$\therefore v^2 = p \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right)$$

.....III

எனவே

$C < 0$ எனில், $v^2 < \frac{2p}{r}$, மைய ஒழுக்கு ஒரு நீள்வட்டம்



$C = 0$ எனில், $v^2 = \frac{2\mu}{r}$, மைய ஒழுக்கு ஒரு பரவளைவு

$C > 0$ எனில், $v^2 > \frac{2\mu}{r}$, மைய ஒழுக்கு ஒர் அதிபரவளைவு
(பக்கத்துக் கிளை)

எனவே மைய ஒழுக்கு, இந்த மூன்றில் ஒன்றாக, அதாவது ஒரு கூம்பு வெட்டி ஆக அமையின்றது.

குறிப்பு 1: S குவியப் புள்ளி என்றும், P துகள் அமையும் புள்ளி என்றும் கொண்டால்,

$$\begin{aligned} \text{துகளின் வேகத்தின் வர்க்கம்,} &< \frac{2\mu}{SP} \text{ எனில் நீள்வட்டம்} \\ &= \frac{2\mu}{SP} \text{ எனில் பரவளைவு} \\ &> \frac{2\mu}{SP} \text{ எனில் அதிபரவளைவு} \end{aligned}$$

குறிப்பு 2: மைய ஒழுக்கின் ஒரு புள்ளியில் திசைவேகம் v எனில்,

$$\left. \begin{aligned} \text{நீள்வட்டப் பாதையில்} \quad v^2 &= \mu \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right] \\ \text{பரவளைவுப் பாதையில்} \quad v^2 &= \frac{2\mu}{r} \\ \text{அதிபரவளைவுப் பாதையில்} \quad v^2 &= \mu \left[\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right] \\ &\quad \text{(பக்கத்துக் கிளை)} \end{aligned} \right\} \dots \dots (5)$$

விதிவிலக்கு, ஹீலிந் வர்க்க விதியின் கீழான மைய ஒழுக்கில், எந்தப் புள்ளியிலும் திசைவேகம் மூலையில் இருந்து உள்ள தூரத்தை மட்டுமே பொறுத்தது. அது அம்மயப்போது சென்றுகொண்டிருக்கும் திசையைப் பொறுத்தது அன்று என அறிகிறோம்.

குறிப்பு 3: நீள்வட்ட, அதிபரவளைவுப் பாதைகளில்

$$\begin{aligned} h^2 &= \mu \frac{b^2}{a} \quad (\text{II, III க்கு காண்க}) \\ &= \mu [\text{அரைச் செவ்வகம்}] \\ &= \mu l \end{aligned}$$

ஆகவே I அரைச் செவ்வக நீளத்தைக் குறித்தால்,

$$h^2 = \mu l$$

பரவளைவுப் பாதையில் $l = \frac{1}{2} (4a) = 2a$

$$h^2 = 2\mu a$$

$$= \mu l$$

எனவே மூன்று பாதையிலும்

$$h^2 = \mu l$$

குறிப்பு 4: மூன்று கூறிய மூன்று பாதையிலும், நீள்வட்டம் மட்டுமே ஒரு அடைத்த வளைவரை (closed curve).

நீள்வட்டத்தின் பரப்பு $= \pi ab$

$$\text{பரப்பு வேகம்} = \frac{1}{2} h$$

$$\therefore T = \frac{\pi ab}{(\frac{1}{2} h)}$$

$$= \frac{2\pi ab}{h}$$

$$= \frac{2\pi ab}{\sqrt{\mu \cdot \frac{b^2}{a}}}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2}$$

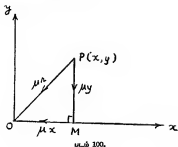
குறிப்பு 5: வான சார்ந்திரத்தில், முக்கியமான பாதை நீள்வட்டமே. கோள்கள், குறியீடுகள் சுற்றி நீள்வட்டப் பாதையில் நியங்குகின்றன.

பல் வகுப்புகளுக்கு ஒரு மூலதன திரும்பத் திரும்ப வரும் வால் நட்சத்திரங்கள், மிகவும் நீண்ட நீள்வட்டப் பாதையில் (ஏறக்குறையப் பரவளைவை ஒத்த) நியங்குகின்றன.

பரவளைவுப் பாதையிலே, அதிபரவளைவுப் பாதையிலே நியங்கும் ஒரு கோள், குறிய மண்டலத்தை விட்டு, திரும்பவே திரும்பாதவாறு ஒடியிடும்.

8-10. நீள்வளையப் பாதையில் நியங்கும்

ஒரு துகள், அதன் முடுக்கம் ஒரு நிலையான புள்ளியை நோக்கி இருக்குமாயும், அப் புள்ளியில் இருந்து உள்ள தூரத்திற்கு நேர் விகிதத்தில் இருக்குமாயும் நியங்குகிறது. அதன் கமைய ஒழுக்கத்தை காண்போம்.



O விசை மையம்

t எனும் கணத்தில் துணியின் நிலை P (x, y) என்ற புள்ளி
OP = r என்க.

∴ PO-ன் திசையில் செயல்படும் விசை α r,
அதாவது = m . n²r என்கோம்.

n²r-ன் இயிடுகம், MO லுநிலை μx, PM-லுநிலை μy

இயக்கக் சமன்பாடுகளை எழுத,

$$\ddot{x} = -n^2x \quad \dots\dots(1)$$

$$\ddot{y} = -n^2y \quad \dots\dots(2)$$

(1), (2) இவற்றின் பொதுத் தீர்வுகள்,

$$x = A \cos nt + B \sin nt \quad \dots\dots(3)$$

$$y = C \cos nt + D \sin nt \quad \dots\dots(4)$$

A, B, C, D மாறு எண்கள். இவற்றைத் தொடக்கத்தில் உள்ள
இயக்கத்தை வைத்துக் கணக்கிடலாம்.

$$\begin{aligned} (3) \times D - (4) \times B, \\ xD - By = (AD - BC) \cos nt \end{aligned} \quad \dots\dots(5)$$

$$\begin{aligned} (3) \times C - (4) \times A, \\ xC - Ay = (BC - AD) \sin nt \end{aligned} \quad \dots\dots(6)$$

சமன்பாடுகள் (5), (6)-ல் இருந்து, t-ஐ நீக்கிவிட,
(Dx - Ey)² + (Cx - Ay)² = (AD - BC)²

$$x^2(C^2 + D^2) - 2xy(BD + AC) + y^2(A^2 + B^2) = (AD - BC)^2 \dots (7)$$

இது

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = \lambda$$

எனும் நேர்நேர்மில் இருப்பதால், மையக் கூம்பு வளைவைக் குறிக்கின்றது.

$$\begin{aligned} ab - h^2 &= (C^2 + D^2)(A^2 + B^2) - (BD + AC)^2 \\ &= (BC - AD)^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lambda^2 - ab > 0$$

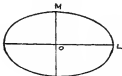
இந்தக் கூம்பு வளைவு ஒரு நீள்வளைவுப் பாதையாகும். இந்த மையம், மீள் மையமாக இருக்கும்.

குறிப்பு 1: சமன்பாடுகள் (3), (4)-ல் இருந்து, A, B, C, D-ன் மதிப்பு எதுவானாலும், அதாவது, நேரடிக் கதிர்வெண் எதுவானாலும், $t + \frac{2\pi}{n}$ ரீதியிடு செயல், x, y-ன் மதிப்புகள் மாறுவதில்லை. ஆகவே, இதன் காலவட்டம் $\frac{2\pi}{n}$ எனலாம். இந்த இயக்கத்தை நீள்வளைவுத் தளியினை இயக்கம் (Elliptic simple harmonic motion) எனலாம்.

குறிப்பு 2: OX-ன் மீது O-யிலிருந்து a தூரத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியில் இருந்து, OY-க்கு இணையான திசையில் V எனும் திசை வேகத்துடன் ஏவப்பட்டால், நேரடிக் கதிர்வெண், $t=0$ -ல்,

$$\begin{aligned} x &= a & \dot{x} &= 0 \\ y &= 0 & \dot{y} &= V \end{aligned}$$

ஆகும்.



படம் 101.

சமன்பாடுகளில் பிரதியிடு செயல்,

$$A = a; B = 0 = C; D = \frac{V}{n}$$

எனவே பாதையின் சமன்பாடு

$$x = a \cos nt$$

$$y = \frac{V}{n} \sin nt$$

அதாவது $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ஆகும். $\left[b = \frac{V}{n} \text{ எனில்} \right]$

ஆகவே வியக்கப்பாதை, இச் சமன்பாடு கொடுக்கும் நீள்வட்டையப் பாதையாகும்.

$$\text{மேலும் } x = 0 \text{ எனில் } y = b; OM = \frac{V}{n}$$

$$\therefore V = n \cdot OM$$

\therefore எதிர்நாளத்தில் (L) திசைவேகம் = n . [OL -ன் அளவு இரண்டு மடங்கம்]

மாதிரிக் கணக்குகள்

1. ஒரு துகள் ஆரத்திலேயும் முடுக்கம் இல்லாதவாறு, $r = ae^{\theta}$ எனும் சமகோணச் சுருளியின்போது வியக்குகிறது. அதன் கோணவேகம் ஒரு மாறா எண் என்றும், திசைவேகம், முடுக்கம் பிரண்டும் r -க்கு நேர்விகிதத்தில் உள்ளன எனவும் காட்டுக.

$$\text{துகளின் பாதை } r = ae^{\theta} \quad \dots \dots (1)$$

$$\text{ஆர முடுக்கம்} = 0$$

$$\therefore \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0$$

$$\therefore \ddot{r} = r\dot{\theta}^2 \quad \dots \dots (2)$$

$$\dot{r} = ae^{\theta} \cdot \dot{\theta} = r\dot{\theta}$$

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ &= r\dot{\theta}^2 + r\ddot{\theta} \quad \dots \dots (3) \end{aligned}$$

(2), (3)-கி இருத்து

$$r\ddot{\theta} = 0$$

$$\therefore \ddot{\theta} = 0$$

$$\therefore \dot{\theta} = \text{மரபு எண்} = \omega \text{ எண்.}$$

$$\boxed{\dot{\theta} = \omega}$$

$$\begin{aligned} (\text{நிசைவேகம்})^2 &= (\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2 \\ &= (\dot{r})^2 + (r\omega)^2 \\ &= 2r^2 \omega^2 \end{aligned}$$

$$\text{நிசைவேகம்} = r\omega\sqrt{2}$$

$$\boxed{\text{நிசைவேகம்} \propto r}$$

$$\begin{aligned} (\text{மடுக்கம்})^2 &= (\text{ஆளா மடுக்கம்})^2 + (\text{குறுக்கு மடுக்கம்})^2 \\ &= (\text{குறுக்கு மடுக்கம்})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{குறுக்கு மடுக்கம்} &= \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) \\ &= \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \omega) \\ &= \frac{\omega}{r} + 2r \frac{dr}{dt} \\ &= 2\omega \left(\frac{r}{2} \right) \\ &= 2\omega (r\dot{\theta}) \\ &= 2\omega^2 r \end{aligned}$$

$$\therefore \text{மடுக்கம்} = 2r\omega^2$$

$$\boxed{\text{மடுக்கம்} \propto r}$$

2. ஒரு துகளின் ஆளாத் நிசைவேகம் பிழிவு λr ; குறுக்குத் நிசைவேகம் பிழிவு $\mu \theta$. துகளின் நியூட்டன் பாதையைக் காண்டு, ஆளா மடுக்கம் மும், குறுக்கு மடுக்கமும் முறையே $\left(\lambda^2 r - \frac{\mu^2 \theta^2}{r} \right)$, $\mu \theta \left(\lambda + \frac{\mu}{r} \right)$ என திறவுக.

$$\text{ஆளாத் நிசைவேகம் } \dot{r} = \lambda r \quad \dots\dots(1)$$

$$\text{குறுக்குத் நிசைவேகம் } r\dot{\theta} = \mu \theta \quad \dots\dots(2)$$

$$\frac{dr}{dt} = \lambda r$$

$$r \frac{d\theta}{dt} = \mu\theta$$

$$\therefore r \frac{d\theta}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = \mu\theta$$

$$\lambda r^2 \frac{d\theta}{dr} = \mu\theta$$

$$\therefore \frac{d\theta}{\theta} = \frac{\mu}{\lambda} \cdot \frac{1}{r^2} \quad \dots\dots(3)$$

$$\therefore \log \theta + \log c = -\frac{\mu}{\lambda} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\boxed{\therefore c\theta = e^{-\mu/\lambda r}} \quad \dots\dots(4)$$

இது பரவையின் சமன்பாடு.

$$\text{ஆளா முடுக்கம்} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$\dot{r} = \lambda r$$

$$\therefore \ddot{r} = \lambda \dot{r} = \lambda^2 r$$

$$r\dot{\theta}^2 = \mu\theta$$

$$\therefore \dot{\theta}^2 = \frac{\mu^2\theta^2}{r^4}$$

$$\therefore \text{ஆளா முடுக்கம்} = \lambda^2 r - \frac{\mu^2\theta^2}{r} \quad \dots\dots(5)$$

$$\text{குறுக்கே முடுக்கம்} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta})$$

$$= \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{\mu\theta}{r} \right)$$

$$= \frac{\mu}{r} \frac{d}{dt} (r\theta)$$

$$= \frac{\mu}{r} [r\dot{\theta} + \dot{r}\theta]$$

$$= \frac{\mu}{r} [\mu\theta + \lambda r\theta]$$

$$= \mu\theta \left[\frac{\mu}{r} + \lambda \right] \quad \dots\dots(6)$$

3. ஒரு துகள் O எனும் ஆதியில் (origin) இருந்து புறப்பட்டுத் தொடக்கக் கோட்டின் திசையில் $\frac{f}{w}$ எனும் வேகத்தடனும், O-ஐப் பத்திய சீரான செணாவெகம் w உடனும், எதிர்க்கூறியவழியை சீரான ஆதரமுடுக்கம் $-f$ உடனும் இயக்குகிறது. ஆரத் திசை வேகத்தின் வளர்ச்சி வீதம் (rate of growth) எப்போதும் நேர்க்குறி உடைத்ததாக இப்போயென்றும், ஆனால் பூச்சியத்தை அனுசுக்கட்டு மென்றும் காட்டுக.

துகளின் பாதையின் சமன்பாடு

$$rw^2 = f(1 - e^{-\theta})$$

எனவும் காட்டுக.

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -f \quad \dots(1)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = w \quad \dots(2)$$

$$\therefore \frac{d^2r}{dt^2} - rw^2 = -f$$

2 $\frac{dr}{dt}$ ஆல் பெருக்கித் தொகைக்கொடு என,

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r^2w^2 = -2fr + A \quad \dots(3)$$

தொடக்கத்தில்

$$\frac{dr}{dt} = \frac{f}{w}, \quad r = 0$$

$$\therefore \frac{f^2}{w^3} - 0 = 0 + A$$

$$\therefore A = \frac{f^2}{w^3}$$

$$\therefore \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r^2w^2 = -2fr + \frac{f^2}{w^3}$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(rw - \frac{f}{w}\right)^2$$

$$\therefore \frac{dr}{dt} = rw - \frac{f}{w} \quad \text{அல்லது} \quad \frac{f}{w} - rw \quad \dots(4)$$

ஆனால் தொடக்க நிலையில்

$$\frac{dr}{dt} = \frac{f}{w} \quad (r = 0)$$

ஆகவே,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{f}{w} - wr \quad \dots\dots(5)$$

மட்டுமே எடுத்துக்கொள்ளினால்,

$$\therefore \frac{dr}{\frac{f}{w} - wr} = dt$$

$$\therefore -\frac{1}{w} \log\left(\frac{f}{w} - wr\right) = t + B \quad \dots\dots(6)$$

தொடக்க நிலையில்

$$t = 0 \quad r = 0$$

$$\therefore B = -\frac{1}{w} \log \frac{f}{w}$$

(6)-ல் பிரதியிடுவால்,

$$-\frac{1}{w} \log\left(\frac{f}{w} - wr\right) = t - \frac{1}{w} \log \frac{f}{w}$$

$$\therefore t = \frac{1}{w} \log \frac{\frac{f}{w}}{\frac{f}{w} - wr}$$

$$\therefore e^{-wt} = \frac{\frac{f}{w} - wr}{\frac{f}{w}}$$

$$= 1 - \frac{rw^2}{f}$$

$$\therefore rw^2 = f(1 - e^{-wt}) \quad \dots\dots(7)$$

ஆனால்

$$\frac{d\theta}{dt} = w$$

$$\therefore \theta = wt + C$$

$t=0$ எனில் $\theta=0$ (தொடக்க நிலையில்)

$$\therefore C = 0$$

$$\therefore \theta = \omega t \quad \dots\dots(8)$$

எனவே சமன்பாடுகள் (7), (8)-ல் இருத்து, துகளின் பாதை

$$r\omega^2 = f(1-e^{-\theta}) \quad \dots\dots(9)$$

$$\text{நிசைவேகத்தின் வளர்ச்சி வீதம்} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right)$$

$$= \frac{d}{dt} \left[\frac{f}{\omega} - r\omega \right] \quad [(9)\text{-ல் இருத்து}]$$

$$= -\omega \frac{dr}{dt}$$

$$= -\omega \left[\frac{f}{\omega} - r\omega \right]$$

$$= -f + r\omega^2$$

$$= -f + f(1-e^{-\theta}) \quad [(9)\text{-ல் இருத்து}]$$

$$= -fe^{-\theta}$$

$$< 0$$

மேலும்

$$t \rightarrow \infty \text{ எனில் } \theta \rightarrow \infty$$

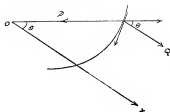
$$\therefore -fe^{-\theta} \rightarrow 0$$

ஆகவே ஆரைத் திசைவேகத்தின் வளர்ச்சி வீதம் பூச்சியத்தை அணுகுகின்றது.

4. m நிறமிவுடைய ஒரு பொருள், P எனும் மைய விசை புடனும், தொடக்கக் கோட்டின் நேர்த்திசையில் Q எனும் விசைபுடனும், $r=a(1+\cos \theta)$ எனும் வளைவிலிருந்து கியங்குகிறது. மையப் புள்ளியைப் பற்றிய கோணவேகம் மாறு மதிப்பான ω எனில், P , Q -ன் மதிப்பைக் கண்டுவிட. துகளின் கியக்க ஆற்றம் $\frac{a(2P+3Q)}{8}$ எனவும் நிறுவுக.

OX -க்கு இணையாகவுள்ள Q -ஐப் பிரிக்க,

$$\text{ஆரைத் திசையில் விசைகள்} = Q \cos \theta - P$$



படம் 102.

குறுக்குத் திசையில் விசைகள் $= Q \sin \theta$ (θ குறைவும் போக்கில்)
-ஆகவே இத் திசைகளில் சமன்பாட்டை எழுது,

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = Q \cos \theta - P \quad \dots\dots(1)$$

$$m \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = -Q \sin \theta \quad \dots\dots(2)$$

$$\text{ஆனால் } \dot{\theta} = \omega$$

$$r = a(1 + \cos \theta)$$

$$\therefore \dot{r} = -a \sin \theta \cdot \dot{\theta}$$

$$= -a\omega \sin \theta$$

$$\ddot{r} = -a\omega \cos \theta \cdot \dot{\theta}$$

$$= -a\omega^2 \cos \theta$$

சமன்பாடுகள் (1), (2)-ல் இருந்து,

$$\begin{aligned} Q \cos \theta - P &= m[-a\omega^2 \cos \theta - a(1 + \cos \theta)\omega^2] \\ &= -m a \omega^2 (1 + 2 \cos \theta) \quad \dots\dots(3) \end{aligned}$$

$$-Q \sin \theta = m \cdot \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \omega)$$

$$= m \cdot 2\omega \dot{r}$$

$$= -2m\omega \cdot a\omega \sin \theta$$

$$\therefore Q = 2ma\omega^2 \quad \dots\dots(4)$$

(3), (4)-ல் இருத்து,

$$\begin{aligned}
 P &= Q \cos \theta + m a \omega^2 (1 + 2 \cos \theta) \\
 &= 2 m a \omega^2 \cos \theta + m a \omega^2 (1 + 2 \cos \theta) \\
 &= m a \omega^2 (1 + 4 \cos \theta) \quad \dots\dots(5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{துகளின் மியக்க ஆற்றல்} &= \frac{1}{2} m v^2 \\
 &= \frac{1}{2} m [r^2 + (r \dot{\theta})^2] \\
 &= \frac{1}{2} m [a^2 \omega^2 \sin^2 \theta + a^2 \omega^2 (1 + \cos \theta)^2] \\
 &= \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 [\sin^2 \theta + (1 + \cos \theta)^2] \\
 &= m a^2 \omega^2 (1 + \cos \theta) \quad \dots\dots(6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{2P + 3Q}{8} &= \frac{2 m a \omega^2 (1 + 4 \cos \theta) + 3 \times 2 m a \omega^2}{8} \\
 &= \frac{m a \omega^2 [2 + 8 \cos \theta + 6]}{8} \\
 &= m a \omega^2 [1 + \cos \theta] \quad \dots\dots(7)
 \end{aligned}$$

எனவே, (6), (7)-ல் இருத்து,

$$a \left[\frac{2P + 3Q}{8} \right] = m a^2 \omega^2 (1 + \cos \theta) = \text{இ.ஆ.}$$

$$\therefore \text{துகளின் மியக்க ஆற்றல்} = a \left[\frac{2P + 3Q}{8} \right].$$

5. ஒரு நேரான, வழுவுறாப் பளா குழல், குழலின் ஏறேனும் ஒரு புள்ளியை நிலையாகக்கொண்டு, கிடைதள மட்டத்தில் ω எனும் சீரான கோணவேகத்தோடு சுழல்கின்றது. தொடக்க நேரத்தில், குழலுக்குள் வைக்கப்பட்டிருக்கும் ஒரு துகள், நிலையான புள்ளியில் இருந்து a தூரத்தில் உள்ளது. t நேரத்திற்குப் பிறகு அதன் தூரம் $a \cos \omega t$ ஆக இருக்கும் எனக் காட்டு. அப்பொழுது குழல், துகளின்மீது செலுத்தும் அழுத்தத்தையும் காட்டுக.

O என்பது குழலின் நிலையான புள்ளியையும், P துகள், t நேரத்தில் இருக்கும் கிடைதளமும் குறிக்கட்டும்.

குழல், கிடைதளத்தில் சுற்றுவதால், அதன்மீது OP -க்குச் செங்குத்தாகச் செயற்படும் (குழலின்) துகளின்மீதான அழுத்தமான R மட்டுமே ஆகும்.

ஆகவே, துகளின் திணிவு m எனில்,

$$\text{ஆதர மடுக்கம்} = 0$$

$$\text{குறுக்கு முடுக்கம்} = \frac{R}{m}$$

$$\therefore \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 0 \quad \dots\dots(1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{R}{m} \quad \dots\dots(2)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (\text{கொடுக்கப்பட்டுள்ள மாற எண்})$$

ஆகவே (1), (2) சமன்பாடுகளில் இருந்து

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = r \omega^2 \quad \dots\dots(3)$$

$$R = 2m\omega \frac{dr}{dt} \quad \dots\dots(4)$$

(3)-ல் இரு பக்கங்களையும் $2 \frac{dr}{dt}$ ஆல் பெருக்கித் தொகைக் கொடுக்கலாம்,

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \omega^2 r^2 + A \quad \dots\dots(5)$$

தொடக்க நிலையில் $r = a; \frac{dr}{dt} = 0$

$$\therefore A = -\omega^2 a^2$$

(5)-ஐ எழுத, $\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \omega^2 r^2 - \omega^2 a^2$

$$\therefore \frac{dr}{dt} = \omega \sqrt{r^2 - a^2} \quad \dots\dots(6)$$

$$\frac{dr}{\sqrt{r^2 - a^2}} = \omega dt$$

$$\therefore \cosh^{-1} \frac{r}{a} = \omega t + B \quad \dots\dots(7)$$

தொடக்கநிலையில்

$$t = 0 \text{ எனும்போது } r = a$$

$$\therefore \cosh^{-1} 1 = 0 + B, \quad \therefore B = 0$$

$$\therefore \cosh^{-1} \frac{r}{a} = \omega t$$

$$\therefore r = a \cosh \omega t$$

மேலும் சமன்பாடு (6)-ல் இருந்து

$$\begin{aligned} R &= 2m\omega \frac{dr}{dt} \\ &= 2m\omega a\omega \sinh \omega t \\ R &= 2am\omega^2 \sinh \omega t \end{aligned}$$

6. ஒரு துகள், கைய விசை இயக்கத்தில்,

$$r^2 = A \cos n\theta + B \sin n\theta$$

எனும் பாதையில் செல்கின்றது. அதன் கைய விசை என்ன?

முதலில்

$$r^2 = A \cos n\theta + B \sin n\theta$$

என்பதை

$$r^2 = a^2 \cos (n\theta - \alpha)$$

என்ற உருவில் எழுதுவோம்

$$A = a^2 \cos \alpha$$

$$B = a^2 \sin \alpha$$

என்ற முறையில் செய்வ

$$r^2 = a^2 [\cos \alpha \cos n\theta + \sin \alpha \sin n\theta]$$

$$r^2 = a^2 \cos (n\theta - \alpha) \quad \dots\dots\dots(1)$$

இதிலிருந்து

$$a^2 = A^2 + B^2$$

$$\tan \alpha = \frac{B}{A}$$

$$\therefore \frac{1}{u^2} = a^2 \cos (n\theta - \alpha)$$

$$-n \log u = \log a^2 + \log \cos (n\theta - \alpha)$$

$$-n \frac{du}{d\theta} = \frac{-n \sin (n\theta - \alpha)}{\cos (n\theta - \alpha)}$$

$$\therefore \frac{du}{d\theta} = u \cdot \tan (n\theta - \alpha) \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{du}{d\theta} \tan (n\theta - \alpha) + nu \sec^2 (n\theta - \alpha)$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = u \tan^2 (n\theta - \alpha) + nu \sec^2 (n\theta - \alpha) \dots\dots(3)$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} + u &= u [1 + \tan^2 (\theta - \alpha)] + nu \sec^2 (\theta - \alpha) \\ &= (n+1)u \sec^2 (\theta - \alpha) \\ &= (n+1)u \cdot a^2 u^2 \left[\because \frac{1}{u^2} = a^2 \cos^2 (\theta - \alpha) \right]\end{aligned}$$

பாதையில் வகைக்கெழுத் சமன்பாடு

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{d\theta^2} + u &= \frac{F}{h^2 u^2} \\ \therefore (n+1)u a^2 u^2 &= \frac{F}{h^2 u^2} \\ \therefore F &= (n+1)u \cdot a^2 u^2 h^2 u^2 \\ &= (n+1)h^2 a^2 u^{2n+3} \\ \therefore F &\propto \frac{1}{r^{2n+3}}\end{aligned}$$

7. $r^n = a^n \cos n\theta$ எனும் பாதையில் மையிலும் துணுக்கு, விகித மையத்தை நோக்கி, அதன் மூடுக்கை சீர்தி உள்ள n

மைய ஒழுக்கின் வகைக்கெழுத் சமன்பாடு

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{d\theta^2} + u &= \frac{F}{h^2 u^2} \quad \dots\dots(1) \\ r^n &= a^n \cos n\theta\end{aligned}$$

$$\therefore u^n \cos n\theta = 1 \quad \dots\dots(2) \quad \left(\because r = \frac{1}{u} \right)$$

இரு பக்கமும் லாக்கித் எடுக்க, (மடக்கை காண)

$$n \log u + n \log \cos \theta = 0 \dots\dots(3)$$

வகையீடு காண

$$\begin{aligned}n \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{d\theta} - \frac{n \sin \theta}{\cos \theta} &= 0 \\ \therefore \frac{du}{d\theta} &= u \tan \theta \quad \dots\dots(4)\end{aligned}$$

மறுபடியும் வகையீடு காண

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{d\theta^2} &= u n \sec^2 \theta + \tan \theta \cdot \frac{du}{d\theta} \\ &= nu \sec^2 \theta + u \cdot \tan^2 \theta\end{aligned}$$

∴ (1)-ல் இருந்து,

$$\begin{aligned}\frac{F}{h^2 u^2} &= u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} = u + nu \sec^2 n\theta + u \tan^2 n\theta \\ &= u(n+1) \sec^2 n\theta \\ &= u(n+1) (a^2 u^2)^2 \\ &= (n+1) a^2 u^{2n+1} \\ \therefore F &= (n+1) a^2 h^2 u^{2n+1} \\ &= \frac{(n+1) a^2 h^2}{r^{2n+3}}\end{aligned}$$

$$\therefore F \propto \frac{1}{r^{2n+3}}$$

குறிப்பு :

(i) $n = 1$ எனில், $r = a \cos \theta$, இது ஒரு வட்டம்

$$F \propto \frac{1}{r^3}$$

(ii) $n = \frac{1}{2}$ எனில், $r^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}} \cos \frac{\theta}{2}$, இது ஓர் மீதய உரு

$$F \propto \frac{1}{r^4}$$

(iii) $n = -\frac{3}{2}$ எனில்,

$$r^{-\frac{3}{2}} = a^{-\frac{3}{2}} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$a^{\frac{3}{2}} = r^{\frac{3}{2}} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$r = \frac{a}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2a}{1 + \cos \theta}$$

$$\therefore \frac{2a}{r} = 1 + \cos \theta$$

இது ஒரு பரவலை,

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

(iv) $n = -2$ எனில்,

$$r^{-2} = a^{-2} \cos 2\theta$$

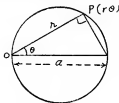
$$r^2 \cos 2\theta = a^2$$

இது ஒரு செவ்வக அதிபரவகிலும்,

$$F = (-1) a^{-2} h^2 r \quad F \phi = r$$

F -ன் மீத எதிர்க்குறி, துகள் விசை ஹயத்திற்கு எதிர் திசையில் செய்குவின்றது என்பதைக் காட்டுகின்றது.

8. ஒரு துகள், ஆதிக் வட்டத்தின்மேல் உள்வலது அமைந்த வட்டப்பாதையில் செய்குவின்றது. அதன் முடுக்கச் சக்தி என்ன?



படம் 103.

a , வட்டத்தின் விட்டமெனில், பாதையில் சுமன்பாடு,

$$r = a \cos \theta \quad \dots\dots(1)$$

$$\therefore \frac{1}{u} = a \cos \theta$$

$$au \cos \theta = 1$$

$$\log a + \log u + \log \cos \theta = 0$$

வகையிடு கனம்,

$$\frac{1}{u} \frac{du}{d\theta} - \tan \theta = 0$$

$$\therefore \frac{du}{d\theta} = u \tan \theta \quad \dots\dots(2)$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = u \sec^2 \theta + u \tan^2 \theta \quad \dots\dots(3)$$

மைய ஒழுக்கின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் பிரதியிடு செயல்,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{h^2u^3}$$

$$u \sec^2 \theta + u \tan^2 \theta + u = \frac{F}{h^2u^3}$$

$$2u \sec^2 \theta = \frac{F}{h^2u^3}$$

$$2u^2u^3 = \frac{F}{h^2u^3}$$

$$\therefore F = 2u^5h^2u^3$$

$$\therefore F \propto \frac{1}{r^5}$$

9. ஒரு துகள் மைய விசையில் கீழ், $r = e^\theta$ எனும் பாதையில் நிகழ்கின்றது. விசையில் உதிப்பு $\frac{2mh^2}{r^4}$ எனவும், துகளின் வேகம் $\frac{h}{r} \sqrt{2}$ எனவும் திடுவுக.

மைய ஒழுக்கின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{h^2u^3} \quad \dots \quad (1)$$

F என்பது மைய முடுக்கம்.

$$r = e^\theta$$

$$\frac{1}{u} = e^\theta$$

$$ue^\theta = 1$$

$$\therefore \log u + \theta = 0$$

வகைப்படுத்துவது,

$$\frac{1}{u} \frac{du}{d\theta} + 1 = 0$$

$$\therefore \frac{du}{d\theta} = -u \quad \dots \quad (2)$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{du}{d\theta} = u \quad \dots \quad (3)$$

சமன்பாடு (1)-ல் பிரதிபலிக்கும்

$$u + u = \frac{F}{h^2 u^2}$$

$$\therefore F = 2h^2 u^3$$

$$\therefore \text{ஹை டிரைசைன் மதிப்பு} = \frac{2\pi h^2}{r^3} \quad \dots \quad (4)$$

$$\text{திசை வேகம் } v = \frac{h}{p}$$

$$\frac{1}{p^2} = u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2$$

$$= u^2 + u^2$$

$$\therefore v^2 = \frac{h^2}{p^2} = 2h^2 u^2$$

$$\boxed{\therefore v = \frac{h}{r} \sqrt{2}} \quad \dots \quad (5)$$

10. ஒரு பரவலைப் பாதையின் $p-r$ சமன்பாடு, (சுமியத்தை மூலநிலைக் கொண்டால்) $p^2 = ar$, பாதையின் ஹை டிரைசைன் காண்க.

F ஹை டிரைசைன் எனில்,

$$F = \frac{h^2}{p^2} \frac{dp}{dr} \quad \dots \dots (1)$$

$$p^2 = ar$$

$$2p \frac{dp}{dr} = a \frac{dr}{dr}$$

$$\therefore \frac{dp}{dr} = \frac{a}{2p} \quad \dots \dots (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2)-ல் மிகுத்து

$$F = \frac{h^2}{p^3} \cdot \frac{a}{2p}$$

$$= \frac{ah^2}{2p^4}$$

$$= \frac{ah^2}{2a^2 r^2}$$

$$= \frac{h^2}{2ar^2}$$

$$\therefore F \propto \frac{1}{r^2}$$

11. ஒரு துகள், ஓர் மைய நோக்கு விசையின் கீழ் ஒரு வளைவரை யில் வருகின்றது. வளைவரையின் எந்தப் புள்ளியிலும் அதன் திசைவேகம், அதே முடுக்கத்தின் நிலப்பெறுகி அதை அளவு தூரத்தில் அமைந்த வட்டப்பாதையில் உள்ள திசைவேகத்திற்குச் சமமெனில், ஒழுக்கு ஒரு சமகோணச் சுருவாக அமையும் எனக் காட்டுக. விசையின் விதமையும் காண்க.

மையநோக்கு முடுக்கம் = F என்க.

r தூரத்தில், F எனும் மைய முடுக்கத்தோடு நிலங்கும் வட்டப் பாதையில், திசைவேகம் v எனில்,

$$\frac{v^2}{r} = F$$

$$v^2 = Fr \quad \dots\dots(1)$$

v என்பது மைய ஒழுக்கிலும், திசைவேகமாறலாக

$$pv = h$$

$$v = \frac{h}{p} \quad \dots\dots(2)$$

(2)ஐ, (1)-ல் பிரதிபிட்டு செல்ல,

$$\frac{h^2}{p^2} = Fr$$

ஆனால்

$$F = \frac{h^2}{p^3} \frac{dp}{dr} \quad \dots\dots(3)$$

$$\therefore \frac{h^2}{p^2} = \frac{h^2}{p^3} \frac{dp}{dr} r$$

$$\therefore \frac{dr}{r} = \frac{dp}{p}$$

தொகைக் கொடு காண,

$$\log r + \log A = \log p$$

$$\therefore Ar = p$$

மைய ஒழுக்கின் சமன்பாடு

$$p = Ar \quad \dots\dots(4)$$

இது ஒரு சமகோணச் சுருவின் சமன்பாடு.

சமன்பாடு 4-ல் இருந்து,

$$\frac{dp}{dr} = A$$

கிடை 3-ல் பிரதிபலி.

$$\begin{aligned} F &= \frac{h^2}{p^3} A \\ &= \frac{A h^2}{A^3 r^3} \quad (\because p = Ar) \\ &= \frac{h^2}{A^2} \cdot \left(\frac{1}{r^3} \right) \\ \therefore F &\propto \frac{1}{r^3} \end{aligned}$$

12. m திணிவுடைய ஒரு துகள், ஒரு மைய விசையின் கீழ் நியூட்டனின் மைய விசை $m\mu [3\alpha u^4 - 2(\alpha^2 - b^2)u^2]$, ($\alpha > b$), துகள் $(\alpha + b)$ தூரத்தில் உள்ள கவியத்தில் இருந்து, $\frac{\sqrt{\mu}}{\alpha + b}$ எனும் திசை வேகத்துடன் ஏவப்படுகிறது. மைய ஒழுக்கின் சமன்பாடு,

$$r = \alpha + b \cos \theta$$

எனக் காட்டுக.

விசை, மையவிசை ஆதலால்,

$$vp = h \quad [\text{மாறு எண்}] \quad \dots\dots(1)$$

கவியத்தில், குறிப்பாக

$$v = \frac{\sqrt{\mu}}{\alpha + b}; \quad p = \alpha + b$$

எனவே,

$$\frac{\sqrt{\mu}}{\alpha + b} \cdot (\alpha + b) = h$$

$$\therefore h^2 = \mu \quad \dots\dots(2)$$

பாதையின் வகைக்கெழுத் சமன்பாடு,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u &= \frac{\mu [3\alpha u^4 - 2(\alpha^2 - b^2)u^2]}{\mu u^2} \\ &= 3\alpha u^2 - 2(\alpha^2 - b^2)u^3 \quad \dots\dots(3) \end{aligned}$$

சமன்பாடு (3)-ஐ $2 \frac{du}{d\theta}$ ஆகப் பெருக்கி, θ -ஐப் பொருத்ததுத்தொகைப்படுத்தி,

$$\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 = 2\alpha u^3 - (\alpha^2 - b^2)u^4 + B \quad \dots\dots(4)$$

இங்கு B ஒரு மாறு எண்.

கவியத்திம்,

$$u = \frac{1}{a+b}; \quad \frac{du}{d\theta} = 0$$

$$\therefore 0 + \frac{1}{(a+b)^2} = \frac{2a}{(a+b)^3} - \frac{(a^2-b^2)}{(a+b)^4} + B$$

$$\therefore B = 0$$

ஆகவே,

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = 2au^3 - (a^2-b^2)u^4 - u^2$$

$u = \frac{1}{r}$ எனப் பிரதிபிட்டு செய்து, r^4 -ஆல் பெருக்க,

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = 2ar - r^3 - (a^2-b^2) \quad \dots\dots(5)$$

$$\therefore \pm \frac{dr}{\sqrt{b^2 - (r-a)^2}} = d\theta$$

எதிர்க் குறியை எடுத்ததற்கொண்டு தொகைப்படுத்த,

$$\cos^{-1}\left(\frac{r-a}{b}\right) = \theta + A$$

$$r = a + b \cos(\theta + A)$$

இங்கு A ஒரு மாறு என.

கவியக் கோட்டை, தொடக்கக் கோடாகக் கொண்டால்,

$$r = a + b, \quad \theta = 0$$

$$\therefore A = 0$$

ஆகவே, மைய மூலக்கில் சமன்பாடு

$$r = a + b \cos \theta$$

கந்தழிப் புள்ளியில் இருந்து அடையும் திசையேகம்

ஒரு மைய மூலக்கில், ஒரு புள்ளியில், கந்தழிப் புள்ளியில் இருந்து அடையும் திசையேகம் என்று குறிப்பிடுகப்போது, துகள் கந்தழிப் புள்ளியில் (ஒவ்வா நிலையில்) இருந்து கொடுக்கப்பட்ட முடுக்கத்தின் கீழ் அப்புள்ளிக்கு விரும்போது, அடையும் திசை வேகத்தைக் குறிக்கும்.

உதாரணமாக, மைய முடுக்கம் $\frac{F}{r^2}$ எனில்

$$a = v \frac{dv}{dr} = - \frac{\mu}{r^2} \quad \text{[மையத்தை நோக்கி இருப்பதால், எதிர்ச்சுறியிடு]} \\ v dv = - \frac{\mu}{r^2} dr$$

$r = \infty$ எனும்போது $v = 0$

$r = a$ எனும்போது திசை முடுக்கம் V எனில்,

$$\int_0^V v dv = \int_{\infty}^a - \frac{\mu}{r^2} dr \\ \frac{V^2}{2} = \frac{\mu}{a} \\ V^2 = \frac{2\mu}{a}$$

பொதுவாக, மைய முடுக்கம் F எனில்,

$$\frac{1}{2} v^2 = - \int_{\infty}^r F dr$$

13. ஒரு துகள் μr^{-2} எனும் மைய முடுக்கத்துடன் மிதக்குகின்றது. அது a தூரத்தில் அமைந்துள்ள ஒரு கலிபர்புள்ளியில் இருந்து, சுத்தழிப்புள்ளியில் இருந்து பெறக்கூடிய திசைவேகத்துடன் துவக்கப்பட்டால், பாதையின் சமன்பாடு

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

எனக் காட்டுக.

மிகு மைய முடுக்கம் $F = \mu r^{-2} = \mu u^2$

∴ பாதையின் வகைக்கெழுத்து சமன்பாடு,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu u^2}{h^2 u^2} \\ \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu u^3}{h^2} \quad \dots\dots(1)$$

சுத்தழிப்புள்ளியில் இருந்து பெறக்கூடிய திசைவேகம் V எனில்,

$$\frac{V^2}{2} = - \int_{\infty}^a F dr$$

$$= - \int_{\infty}^a \frac{\mu}{r^2} dr$$

$$= \frac{\mu}{6a^5}$$

$$\therefore V^2 = \frac{\mu}{3a^5} \quad \dots\dots(2)$$

(V தொடக்கத் திசைவேகம்)

விசை கவயத்தில் இருந்து, தொடக்க வேகத்தின் திசைக்கு வளை
யப்பட்ட செங்குத்துத் தோட்டின் திசை p எனில்,

$$h = pv = p_0 v_0 \quad (\text{மரபு மதிப்புடைவதானதொன்றாக})$$

இங்குக் கவியப்புகளின் எதிர்நிலை ஆனதாகி,

$$p_0 = a$$

$$\therefore h^2 = a^2 \frac{\mu}{3a^5}$$

$$h^2 = \frac{\mu}{3a^3} \quad \dots\dots(3)$$

ஆகவே சமன்பாடு (1)-ல், h^2 -க்குப் பிடிதியிடு செய்ய,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 3a^4u^3 \quad \dots\dots(4)$$

(4)-ல் இரு பக்கங்களிலும் $2 \frac{du}{d\theta}$ ஆல் பெருக்கி, θ -ஆல் தொகை
செய்து காண

$$\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 = a^4u^4 + A \quad \dots\dots(5)$$

தொடக்க நிலையில், எதிர்நிலை கவியப்புகளின் ஆனதாகி

$$\frac{du}{d\theta} = 0$$

$$\text{மேலும் } u = \frac{1}{a}$$

$$\therefore 0 + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^4} + A$$

$$\therefore A = 0$$

ஆகவே (5)-ல், A -இன் மதிப்பைப் பிரதியிடு செயல்

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = a^4 u^6 \quad \dots\dots(6)$$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = u^2 (a^4 u^4 - 1)$$

$$\frac{du}{d\theta} = u \sqrt{a^4 u^4 - 1} \quad \dots\dots(7)$$

$$\therefore -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{a}{r^4} - 1}$$

$$\frac{-r dr}{\sqrt{a^4 - r^4}} = d\theta$$

$$\therefore \cos^{-1} \frac{r^2}{a^2} = 2\theta + 2B \quad \dots\dots(8)$$

தொடக்கத்தில் θ -ன் மதிப்பைக் கவியக்கொட்டிக் கிருத்து அளப்போமெனில்,

$$r = a \text{ எனும்போது } \theta = 0$$

$$\therefore \cos 2B = 1 \quad \therefore B = 0$$

எனவே, மைய ஒழுக்கு

$$\cos^{-1} \frac{r^2}{a^2} = 2\theta$$

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

14. ஒரு துகளின் மைய முடுக்கம் μu^3 . அது a தூரத்தில் உள்ள கவியப்புள்ளியில் கிருத்து ஏவப்படுகிறது. அதன் திசை வேகம், அதே அளவு ஆரமுள்ள வட்டப்பாதையில் உள்ள திசை வேகத்தின் இத்து மடங்கு எனில், மதிமொரு கவியத்தூரத்தைக் காண்க.

மிகு மைய முடுக்கம் $F = \mu u^3$

பாதையில் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு,

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu u^3}{h^2} \quad \dots\dots(1)$$

துகளின் தொடக்கத் திசை வேகம் u_0 எனப்படும்.

a ஆரமுள்ள வட்டப்பாதையில் திசை வேகம் V எனில்,

$$\frac{V^2}{a} = \text{முடுக்கம்} = \frac{\mu}{a^2}$$

$$\begin{aligned}\therefore V^2 &= \frac{h}{a^3} \\ v_o &= 5V \\ \therefore v_o^2 &= \frac{25h}{a^4} \quad \dots\dots(2)\end{aligned}$$

வினா எளியத்தில் இருந்து தொடக்க வேகத்தின் திசைக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் தளம் p எனில்

$$h = pv = p_o v_o$$

கிடைக்க வியப்புகளினிய எதிதானம் ஆனதால், $p_o = a$

$$\begin{aligned}\therefore h^2 &= \frac{a^2 \cdot 25h}{a^4} \\ h^2 &= \frac{25h}{a^2} \quad \dots\dots(3)\end{aligned}$$

ஆகவே சமன்பாடு (1)-ல் h^2 -க்குப் பிரதியிடு செய்ய

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{a^2 u^3}{25} \quad \dots\dots(4)$$

(4)-ல் இரு பக்கங்களையும் $2 \frac{du}{d\theta}$ ஆல் பெருக்கி, 0-ஐப் பந்திய தொகைக்கொடு காண

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{a^2 u^4}{50} + A \quad \dots\dots(5)$$

தொடக்க நிலையில், எதிதானம் வியப்புகளினி ஆனதால்,

$$\frac{du}{d\theta} = 0$$

$$\text{மேலும் } u = \frac{1}{a}$$

$$\therefore 0 + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{50a^2} + A$$

$$\therefore A = \frac{49}{50a^2}$$

(5)-ல், A -ஐ மதிப்பைப் பிரதியிடு செய்ய

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{a^2 u^4}{50} + \frac{49}{50a^2} \quad \dots\dots(6)$$

கவியத் தூதர்தலைப் பெற $\frac{d^2u}{d\theta^2} = 0$ என (6)-ல் பிரதிபிடு செய்வ

$$u^2 = \frac{a^2 u^4}{50} + \frac{49}{50a^2}$$

$$a^4 u^4 - 50a^2 u^2 + 49 = 0$$

$$(a^2 u^2 - 1)(a^2 u^2 - 49) = 0$$

$$\therefore a^2 u^2 = 1 \quad au = 1$$

$$\text{அல்லது } a^2 u^2 = 49 \quad au = 7$$

ஆகவே,

$$u = \frac{1}{a} \quad \text{அல்லது } u = \frac{7}{a}$$

$r = a$ எதிநாளத்தைக் குறிக்கின்றது.

ஆகவே, $r = \frac{a}{j}$ மதினொரு கவியத் தூதர்தலைக் கொடுக்கின்றது.

15. m திணிவுள்ள ஒரு துகள், $\frac{m^2}{r^3}$ எனும் ஈமய நோக்கு விசையுடன், விசை ஈமயத்திலிருந்து a தூரத்திற் உள்ள புள்ளியிற் இருந்து, ஆரத்தின் $\frac{\pi}{4}$ கோணம் உண்டாகும் திசையில் ஏவப்படுகிறது. அதன் நெடங்க வேகம் \sqrt{p}/a எனில், ஈமய ஒழுக்கின் சமன் பரப்பைக் காண்க.

ஈமய முக்கம், $F = \frac{\mu}{r^3} = \mu u^3$

பாதையின் வளைக் கொடுக்க சமன்பாடு,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu u}{h^2} \quad \dots\dots(1)$$

விசை ஈமயத்திற் இருந்து, நெடங்க வேகத்தின் திசைக்கு வரையப் பட்ட செக்குத்துக் கோட்டின் நீளம் p எனில்,

$$h = p v = p_0 v_0$$

இங்கு

$$r_0 = a$$

ϕ எனும் கோணம், நெடங்க நிலை ஆரத்திற்கும், திசை வேகத்திற்கும் இடையே உள்ள கோணம் எனில்

$$\phi = \frac{\pi}{4}$$

$$p_o = r_o \sin \phi$$

$$p_o = r_o \sin \frac{\pi}{4}$$

$$p_o = \frac{r_o}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad \dots\dots(2)$$

$$\therefore h^2 = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{p}{a^2}$$

$$h^2 = \frac{p}{2} \quad \dots\dots(3)$$

ஆகவே சமன்பாடு (1)-ல், h^2 -க்குப் பிரதியிடு செய்வ,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 2u \quad \dots\dots(4)$$

(4)-ல் இரு பக்கங்களிலையும் $2\frac{du}{d\theta}$ ஆல் பெருக்கி, θ ஆல் தொழைக்கி செய்து காண,

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = 2u^2 + A \quad \dots\dots(5)$$

[குறிப்பு: இங்கு எந்திரணம் கவியப் புள்ளி இல்லாததால் $\frac{du}{d\theta} = 0$]

ஆனால்,

$$\frac{1}{p^2} = \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2$$

என அறிவேலாம்.

$$\therefore \frac{1}{p^2} = 2u^2 + A$$

தொடக்க நிலையிலும்,

$$p = p_o = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$u = \frac{1}{a}$$

$$\therefore \frac{2}{a^2} = \frac{2}{a^2} + A$$

$$\therefore A = 0$$

ஆகவே (5)-ல் A -ன் மதிப்பைப் பிரதியிடு செய்வ

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = 2u^3 \quad \dots\dots(6)$$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = u^3$$

$$\frac{du}{d\theta} = u \quad \dots\dots(7)$$

$$\therefore \frac{du}{u} = d\theta$$

$$\log u = \theta + B \quad \dots\dots(8)$$

தொடக்க ஆரத்திற் இருந்து, $\theta=0$ அளக்க,

$$u = \frac{1}{a} \text{ எனும்பொழுது } \theta=0$$

$$\therefore \log \frac{1}{a} = B$$

\therefore (8)-ல் பிரதியிடு செய்வ,

$$\log u = \theta + \log \frac{1}{a}$$

$$u = \frac{1}{a} \cdot e^{\theta}$$

\therefore துகளின் பாதை,

$$r = ae^{-\theta}$$

பயிற்சிக் கணக்குகள்

முதல் பிரிவு

1. ஒரு துகள் $r = ae^{t^2}$ எனும் சமகோணத் துளியின் மீது செல்லுமாறு அமைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் ஆரம் 10 எனும் மாறாத வேக வேகத்தை உடைத்ததற்கு இருந்தால், துகளின் திசைவேகக் கூறுகளையும், முடுக்கக் கூறுகளையும் காண்க.

$$[\text{ஆரத் திசை வேகம்} = 20te^{t^2}]$$

$$\text{குறுக்குத் திசை வேகம்} = 20e^{t^2}$$

$$\text{ஆர முடுக்கம்} = 2ae^{t^2}(t^2-1)$$

$$\text{குறுக்கு முடுக்கம்} = 2ae^{t^2}t]$$

2. ஒரு துகள் $r = ae^{\theta}$ எனும் வரையறையின் மீது மாறாத கோணவேகத்துடன் செல்கின்றது. அதன் ஆர முடுக்கம் பூச்சியம்

எனவும், குறுக்கு முடுக்கம் முனையில் இருந்து அதன் தரத்தின் விகிதத்திலும் இருக்கும் என நிறவுக.

3. மாறாத வேகம் v -வுடன், ஒர் இயைபு உருவின் மேல் $[r = a(1 + \cos \theta)]$ வளைவளும் ஒரு துகளின்

$$(i) \text{ முனைவைச் சார்ந்த கோணவேகம் } \omega = \frac{v \sin \theta/2}{2a}$$

எனவும்

$$(ii) \text{ ஆகா முடுக்கக் கூறு மாறாத மதிப்புடையது } \left(= \frac{3v^2}{4a} \right)$$

எனவும்

$$(iii) \text{ முடுக்கத்தின் வினாவின் மதிப்பு } \frac{3v\omega}{2} \text{ எனவும் நிறவுக.}$$

4. மேற்கூறியவாறு இயைபு உருவின் மேல் அமைந்த துகளின் கோணவேகமும், முடுக்கத்தின் மதிப்பும் r^{-1} -க்கு நேர் விகிதத்திற்கு அமைந்திருக்கின்றன எனக் காட்டுக.

5. α எனும் அளவு ஆரமுடைய ஒரு வட்டப்பாதையில், ஒரு துகள், பாதையின் மேல் உச்சம் ஒரு நிலையான புள்ளியைச் சார்ந்த கோணவேகம் மாறாத திப்பான ω -ஐ உடைத்ததன்மீது சுற்றி வருகிறது. பாதையின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் துகள் $\frac{3}{2}\omega^2$ எனும், முடுக்கத்தைக் கொண்டிருக்கும் என நிறவுக.

$$[r = 2a \cos \theta \text{ எனக் கொள்க.}]$$

6. சீரானவேகம் u -டன், ஒரு துகள், c ஆரமுடைய ஒரு வட்டப் பாதையில் வளைவ வரிகிறது. அதன் ஆகா, குறுக்கு முடுக்கங்கள் மூன்றாவே

$$= \frac{u^2}{c} \cos \theta, \quad -\frac{u^2}{c} \sin \theta$$

எனக் காட்டுக.

7. $r = 2a \sin \theta$ என்ற சமன்பாட்டையுடைய வட்டப்பாதையில், ஒரு துகள் $k \cos \theta$ ஐ எனும் வேகத்துடன் செல்கின்றது. அதன் முடுக்கம் மூன்றாம் துகளையும், முனைவையும் சேர்க்கும் கோட்டின் மேலேயே அமைவும் எனக் காட்டுக.

8. முனைவை நோக்கிய முடுக்கம் எப்போதும் பூச்சியம் உட்காறு $r = 2a \cos \theta$ எனும் வட்டப்பாதையில் ஒரு துகள் செல்கின்றது. அதன் கோண வேகம் ω எனில்,

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\theta} = -2\omega^2 \cot \theta$$

எனவும், குறுக்கு முடுக்கம் $\omega^2 \sin \theta$ -க்கு நேர்விகிதத்தில் உள்ளது எனவும் திறவுக.

9. ஒரு துகள் சீரானவேகத்துடன் ஒரு பரவியைப் பாதையில் செல்கின்றது. P எனும் நிலையில் துகள் மிகுக்கும்போது, S என்ற அதன் குவியத்தைச் சேர்ந்த கோணவேகம் (SP) எனக் காட்டுக.

10. பரவியைப் பாதையில் செல்லும் ஒரு துகளுக்கு, குவியத்தின் வழியே செல்லும் ஆரத்திற்குக் குத்துத் திசையில், திசை வேகக் கூறு மாறாத மதிப்புடையது எனில், துகளின் முடுக்கத்தின் மதிப்பும் மாறா மதிப்புடையது என திறவுக.

11. ஒரு துகளின் பாதை $r = a \tan \theta$. அதன் முடுக்கம் முனைவை நோக்கி மிகுத்தாக, $\left(h = r^2 \frac{d\theta}{dt} \text{ எனில்} \right)$, முடுக்கம் $\frac{h^2}{r^2} \left[3 + \frac{2a^2}{r^2} \right]$ எனக் காட்டுக.

12. ஒரு தளத்தில் அமைந்த துகளுக்கு, அத் தளத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியைப் பற்றிய கோணவேகம் நிலையானது எனில், அதன் குறுக்கு முடுக்கக் கூறு, ஆரத் திசைவேகக் கூற்றிற்கு நேர்விகிதத்தில் அமையும் என திறவுக.

13. 'a' எனும் ஆரமுடைய வண்டிச் சக்கரத்தின் மையப்புள்ளியில் புறப்பட்டு, u எனும் நிலையான வேகத்துடன் ஒரு குறுக்குச் சட்டத்தின் மீது ஒரு பூச்சி ஊர்த்து செல்கிறது. வண்டியின் வேகம் v எனில், குறுக்குச் சட்டத்திற்குக் குத்தாகவும், அதன் வழியேயும் ஆன அதன் முடுக்கக் கூறுகள் என்ன?

$$\left[\text{குறிப்பு: } u = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{a}; \frac{dr}{dt} = u \right] \left(\text{விடை: } -r\omega^2, \frac{2uv}{a} \right)$$

14. ஒரு துகளின் ஆரை, குறுக்குத் திசைக்கூறுகள் முறையே $2\lambda \cos \theta$, λr . இத் திசைகளில் முடுக்கக்கூறுகள் முறையே $(2a-r)\lambda^2$, $4a\mu\lambda^2$ எனவும், அதன் பாதை $r = a\theta^2 + C$ எனவும் திறவுக. (λ , μ மாறா எண்கள் எனக் கொள்க.)

15. ஒரு துகளின் ஆரை, குறுக்குத் திசைக்கூறுகள் λr^2 , μr^2 . (இங்கும் λ , μ மாறா எண்கள்) துகளின் பாதை

$$\frac{\lambda}{\theta} + C = \frac{\mu}{2r^2}$$

எனக் காட்டு.

அத் திசைகளில் முடுக்கங்கள் மூன்றையே

$$2\lambda^2 r^3 = \frac{h^2 \theta^4}{r}, \text{ \& } \left(\lambda r \theta^3 + \frac{2p \theta^3}{r} \right)$$

எனவும் காட்டுக.

16. ஒரு துகளின் ஆணரத் திசைவேகம், குறுக்குத் திசைவேகத்தின் h மடங்கு எனில், துகளின் பாதை ஒரு சமகோணச் சுருளில் அமைவும் என நிறுவுக.

17. P எனும் ஒரு துகள் மீரு நிலையான u , v எனும் திசைவேகங்களைக் கொண்டதாக உட்கனது. மூதம் திசைவேகம் ஒரு நிலையான திசையிலும், மிரண்டாவது, O எனும் நிலையான புள்ளியில் இருந்து OP -க்கு வரையப்பட்ட ஆரத்திற்குக் குத்தாகவும் அமைந்திருந்தால், துகளின் பாதை O -ஐக் குவியமாகக் கொண்ட ஒரு கூம்பு வளைவு என்று நிறுவுக.

18. xy என்ற வேகத்துடன் ஓடும் ஓர் ஆற்றில், ஒரு கணத்தில் A எனும் புள்ளியில் இருந்து y எனும் சீரான வேகத்துடன் புறப்படும் படகு, A -க்கு நேர்க்குத்தாக எதிர்க்கரையில் அமைந்துள்ள B எனும் புள்ளியை நோக்கியே செறுத்தப்படுகிறது. படகு செல்லும் பாதையின் சமன்பாட்டைக் காட்டுக.

படவின் வேகமும், ஆற்றின் வேகமும் ஒன்றொன்றின் படகு ஒரு பரவளைவுப் பாதையில் செல்லும் எனக் காட்டு.

$$\left[r^2 (\sec \theta + \tan \theta) = K \sec \theta; n=1 \text{ எனில், } \frac{K}{r} = 1 + \sin \theta \right]$$

19. ஒரு துகள் வளைவரை ஒன்றிலேயே சீரான வேகத்துடன் சென்று கொண்டிருக்கிறது. O எனும் நிலையான ஒரு புள்ளியைப் பற்றிய அதன் கோணவேகம், O -ல் இருந்து அது உட்கன தூரத்திற்கு எதிர் விதித்ததில் உட்கனது. வளைவரை O -ஐ முனைவாகக்கொண்ட ஒரு சமகோணச் சுருள் என்று காட்டுக. மேலும் துகளின் முடுக்கம், P -ல் வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் வழியே அமைத்து, OP -க்கு எதிர் விதித்ததில் அமைவும் எனவும் காட்டுக.

20. ஒரு நேரான, வழுவுழிப்பான குழி, அதன் ஒரு முனைப நிலையாகக்கொண்டு கிடைத்தன மட்டத்தில் w எனும் சீரான வேக வேகத்தோடு சுழல்கின்றது. தொடக்க நேரத்தில், குழலுக்குள் இருக்கும் ஒரு துகள், நிலையான முனையில் இருந்து a தூரத்தில்

V எனும் வேகத்துடன் குழுவின் நீளவாட்டில் செல்லுமாறு உள்ளது. t நேரத்தில் அதன் தூரம்

$$a \cosh wt + \frac{V}{w} \sinh wt$$

எனக் காட்டுக.

21. ஒரு நேரான ஹைடிரோபான் குழல், அதன் ஒரு முனை மைய நிலையாகக் கொண்டு நிலைக் குத்துத்தளத்தில் w எனும் சீரான கோண வேகத்தோடு சுழல்கின்றது. தொடக்க நேரத்தில், கிடைத்தள மட்டத்தில் உள்ள அக் குழலுக்குள் கிழக்கும் ஒரு துகள், நிலையான முனையில் கிழந்து a தூரத்தில், V எனும் வேகத்துடன் குழுவின் நீளவாட்டில் செல்லுமாறு உள்ளது. t நேரத்தில் அதன் தூரம்,

$$a \cosh wt + \left(\frac{V}{w} - \frac{g}{2w^2} \right) \sinh wt + \frac{g}{2w^2} \sin wt$$

எனக் காட்டுக.

22. ஓர் கிரேவான, நேராக உள்ள, ஹைடிரோபான் குழல், அதன் O எனும் ஒரு முனை மைய நிலையாகக் கொண்டு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் w எனும் சீரான வேகத்தோடு மேல் நோக்கிச் சுழல்கின்றது. அது கிடைத்தளமட்டத்தில் உள்ளபோது, அதற்குள் கிழக்கும் ஒரு துகள் நிலையான முனையில் கிழந்து a தூரத்தில் உள்ளது. m -ன் மதிப்பு சிறியது எனக்கொண்டால், துகள் O -ஐ அடைய எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம், ஏறக்குறைய $\left(\frac{6a}{gw} \right)^{\frac{1}{2}}$ எனக் காட்டுக.

23. ஒரு நேரான செரெரோப்பான் குழல், அதன் ஒரு முனை மைய நிலையாகக் கொண்டு கிடைத்தள மட்டத்தில் w எனும் சீரான கோண வேகத்தோடு சுழல்கின்றது. குழல் கழல ஆரம்பிக்கும்போது அதற்குள், நிலையான முனையில் கிழந்து a தூரத்தில் ஒரு துகள் வைக்கப்படுகிறது. குழுவின் உராய்வு எண் λ எனில் t நேரத்தில் துகளின் தூரம்,

$$ae^{-wt} \cdot \tan \lambda \cdot [\cosh (wt \sec \lambda) + \sin \lambda \sinh (wt \sec \lambda)]$$

என நிழலுக.

கிரேவாடாக் பரிவு

1. ஒரு துகள் mF எனும் மையநோக்கு விசையுடன் கிடுக்கண்ட வளைவரைகளில் மிடங்குகின்றது. அவ் விசைகள் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளவற்று அமையும் எனக் காட்டுக :

$$(i) \quad r^2 = a^2 \cos 2\theta \qquad F \propto \frac{1}{r^7}$$

(ii) $r^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cos \theta/2$	$F \propto \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}$
(iii) $r = 2a \cos \theta$	$F \propto \frac{1}{r^3}$
(iv) $r = a + b \cos \theta$	$F \propto \frac{1}{r^4}$
(v) $r = a \sin n\theta$	$F \propto \frac{2n^2 a^2}{r^5} - \frac{n^2 - 1}{r^3}$
(vi) $r = a \tan \theta$	$F \propto \frac{1}{r^3} \left[3 + \frac{2a^2}{r^4} \right]$
(vii) $r = a \cot \theta$	$F \propto \frac{3}{r^3} + \frac{2a^2}{r^5}$
(viii) $r = a \sec^2 \frac{1}{2} \theta$	$F \propto \frac{1}{r^3}$
(ix) $r = ae^{\sec \theta}$	$F \propto \frac{1}{r^3}$
(x) $r = a \cosh n\theta$	$F \propto \frac{(1+n^2)}{r^5} - \frac{2n^2 a^2}{r^3}$
(xi) $r^2 = A \cos n\theta - B \sin n\theta$	$F \propto \frac{1}{r^{2n+3}}$
(xii) $r^2 = a^2 \sec n\theta$	$F \propto r^{2n-3}$
(xiii) $\frac{2a^3}{r^3} = 1 + \cos 3\theta$	$F = \text{Constant}$
(xiv) $a = r \sin n\theta$	$F \propto \frac{1}{r^3}$
(xv) $\frac{a}{r} = e^{n\theta}$	$F \propto \frac{1}{r^3}$

2. $p-r$ ஒன்றையொன்றை உபயோகித்துக் கீழ்க்கண்ட வளைவறையின் அமைதிலும் துகளின் கையேறுதாக்கு விசைகளைக் காண்க :

$$(i) \text{ நீள் வளைவு } \frac{b^2}{p^2} = \frac{2a}{r} - 1$$

$$(ii) \text{ அதிபரவளைவு (பக்கத்துக் கிளை) } \frac{b^2}{p^2} = \frac{2a}{r} + 1$$

$$(iii) \text{ அதிபர வளைவு (தூரத்துக்கிளை) } \frac{b^2}{p^2} = \frac{2a}{r} - 1$$

(iv) சமகோணச் சுருள் $p = r \sin \alpha$

$$\left[(i) Fd \frac{1}{r^2} \text{ (ii) } Fd \frac{1}{r^2} \text{ (iii) } Fd = \frac{1}{r^2} \text{ (iv) } Fd \frac{1}{r^3} \right]$$

3. ஒரு துகள், v எனும் வீரான வேகத்தோடு, வட்டப்பாதையில் வளைவு வருகின்றது. மையப்புள்ளியை நோக்கிய மாறுமதிப்புடைய ஒரு விசையின் கீழ் அது இயங்கக் கூடும் எனக் காட்டுக.

4. மைய ஒழுக்கில் அமையும் ஒரு துகளின் திசைவேகம், அத் துகள் விசை மையத்தில் இருந்து உட்கு தூரத்திற்கு எதிர் விசைத்திசில் உட்கு. அதன் பாதையைக் காண்க. $[p = kr]$

5. ஒரு மைய ஒழுக்கில் ஏதோ ஒரு புள்ளியில் திசைவேகம், அப் புள்ளிக்கும் விசை மையத்திற்கும் இடையே உட்கு தூரத்தை ஆரமாகக் கொண்ட வட்டப்பாதையில் இயங்கும்பொது உட்கு திசைவேகத்தின் மூன்றில் ஒரு பங்கு. விசையின் விதிகைக் காண்க, மைய ஒழுக்கின் சமன்பாடு $r^3 = a^3 \cos 3\theta$ எனவும் காட்டுக. $\left[Fd \frac{1}{r^3} \right]$

6. ஒரு துகள், $r = a(1 - \cos \theta)$ எனும் விதய உருவின் மீது, முனைவை நோக்கிய ஒரு விசையின் கீழ் இயங்குகின்றது. விசை, தூரத்தின் நான்கு மடங்கிற்கு எதிர்விசைத்திசில் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

$\theta = \pi$ என்ற கவியத்திசில், P என்பது விசையாகவும், V என்பது திசைவேகமாகவும் ஆனால் $3V^2 = 4aP$ எனவும் காட்டுக.

7. ஒரு துகளின் இயக்கம் t எனும் நேரத்தில்,

$$x = at^2$$

$$y = \frac{b}{t}$$

எனும் சமன்பாடுகளாகக் கொடுக்கப்படுகிறது. அதன் பரப்பளவு வேகம் மாறுத மதிப்புடையது எனக் காட்டுக. அதன் பாதையின் ஒவ்வொரு இடத்திலும் ஒரு நிமிஷமான புள்ளியை நோக்கி அதன் முடுக்கம் $2r$ எனவும் காட்டுக. $[r$ என்பது இங்கு நகரும் துகளுக்கும் நிமிஷமான புள்ளிக்கும் இடையேயுள்ள தூரத்தைக் குறிக்கிறது].

8. ஓர் ஒழுக்கில் (orbit) சென்றுசெல்லுக்கும் துகளின் ஆரம், சமகாலத்தில் சமமான பரப்பளவைக் கவர்த்து சென்றால், துகளின் மீது செயற்படும் முடுக்கம் ஆரத்தின் வர்த்திச் செல்லவேண்டும் எனக் காட்டுக.

மூன்றாம் பிரிவு

1. ஒரு துகள், ஒரு நிலையான புள்ளியை நோக்கி μ^5 எனும் மைய நோக்கு முடுக்கத்துடன் இயங்குகிறது. அது தொடக்க நிலையில் a தூரத்தில் உள்ள கயிற் புள்ளியில் இருந்து ஏவப்பட்டால்,

(i) அதன் தொடக்கத் திசைவேகம் $\left(\frac{\sqrt{\mu}}{a^2\sqrt{2}}\right)$ எனும் போதும்,

(ii) தொடக்கத் திசைவேகம் $\frac{\sqrt{\mu}}{a^2}$ எனும் போதும், துகளின் பாதைகளைக் காண்க.

[(i) $r = a \cos \theta$; (ii) $r = a$]

2. ஒரு துகளின், ஓரங்கு திணிவுள்ள துகள்மீது,

$$\mu [2(a^2 + b^2)\mu^5 - 3a^2b^2\mu^7]$$

எனும், மைய நோக்கு விசை செயற்படுகிறது. துகள் மையப்புள்ளியில் இருந்து a தூரத்தில், தொடக்க ஆரத்திற்கு நிலைக்குத்துத் திசையில், $\frac{\sqrt{\mu}}{a}$ எனும் திசைவேகத்துடன் ஏவப்படுகிறது. துகள் செல்லும் பாதை

$$r^2 = a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta$$

எனக் காட்டுக.

3. ஒரு துகளின்மீது செயற்படும் மையநோக்கு விசை (ஓரங்கு திண்மையுள்ள துகளுக்கு)

$$\frac{5\mu}{r^3} + \frac{8\mu c^2}{r^5}$$

துகள் தொடக்கத்தில் c நொடிகளில் உள்ள ஒரு கயிற் புள்ளியில் இருந்து $\frac{3\sqrt{\mu}}{c}$ திசைவேகத்துடன் ஏவப்பட்டால், துகளின் மைய ஒழுக்கு

$$r = c \cos \frac{2\theta}{3}$$

எனக் காட்டுக.

4. ஒரு துகளின்மீது செயற்படும் மையநோக்கு முடுக்கம் $\mu(r^2 - a^2r)$. துகள் விசைமையத்தில் இருந்து a தூரத்தில் உள்ள கயிற் புள்ளியில் இருந்து, $\sqrt{\frac{2\mu}{3}} \cdot a^3$ திசைவேகத்துடன் ஏவப்பட்டால், துகளின் பாதை $x^4 + y^4 = a^4$ எனக் காட்டுக.

5. ஒரு துகள் μu^5 எனும் மைய மூடுக்கத்தில் கீழ் மியங்கு கின்றது. அது α தூரத்தில் உண் கவியத்தில் இருந்து, $n \left(\frac{\mu}{2\alpha^4} \right)^{\frac{1}{2}}$ எனும் திசைவேகத்துடன் ஏவப்பட்டாக, அதன் மற்பெறு கவியத்தூரம் $\frac{\alpha}{\sqrt{n^2-1}}$ எனக் காட்டுக.

6. ஒரு துகள், மைய எதிர்விசை $\frac{m\mu}{(தூரம்)^5}$ -யின் கீழ் செயல் படுகிறது. அது V எனும் திசைவேகத்துடன், α தூரத்தில் உண் கவியப்புள்ளியில் இருந்து ஏவப்படுகிறது.

(i) அதன் மைய ஒழுக்கு $r \cos p\theta = \alpha$ எனக் காட்டுக.

(ii) $p^2 = \frac{r^2 + \alpha^2 V^2}{\alpha^2 V^2}$ எனில், t நேரத்தில் அது கடத்துள்ள கோணம் $\theta = \frac{1}{p} \tan^{-1} \left[\frac{pV}{\alpha} t \right]$ -இல் இருந்து பெறலாம் எனக் காட்டுக.

7. $\frac{f}{r^2} + f$ எனும் மையமேர்க்கு மூடுக்கத்துடன் மியங்கும் ஒரு துகள், α தூரத்தில் உண் கவியத்தில் இருந்து, $\frac{\sqrt{f}}{\alpha}$ எனும் திசை வேகத்துடன் ஏவப்படுகின்றது. t நேரம் சென்ற பிறகு $r = \alpha - \frac{1}{2}ft^2$ எனக் காட்டுக.

8. n திணிவுள்ள ஒரு துகள் ஒரு மைய ஒழுக்குப் பாதையில் வளைவ வருகின்றது. மைய நேர்க்குவிசை,

$$km [n^2 + 1 - (2n^2\alpha^2/r^2)]/r^3$$

$t=0$ எனும் போது, துகள் α தூரத்தில் உண் ஒரு கவியத்தில் இருக் கின்றது. அத்நிலையில் அதன் திசைவேகம், கத்தழிப்புள்ளியில் இருந்து கவியப்புள்ளிக்கு விழுந்தால் வினைபுழை திசைவேகத்தை உடையதாக இருக்கின்றது. மைய ஒழுக்கின் மையப்பாடு $r = \alpha \cos k\pi$ எனக் காட்டுக.

9. மைய நேர்க்கு விசை $\mu u^5 \left[\frac{5}{u^2} - 8c^2 \right]$ ஆக உண் ஒரு துகள், α தூரத்தில் உண் கவியப் புள்ளியில் இருந்து, கத்தழியில் $13/2-22$

கிடுத்து அடையும் திசை வேகத்துடன் ஏவப்படுகிறது. அதன் பாதை

$$r = \frac{3}{2}c [e^{2\theta} - e^{-2\theta}]$$

எனக் காட்டுக.

10. ஒரு துகள், $\left(\frac{h}{mv}\right)^2$ எனும் மைய முடுக்கத்துடன், α தூரத்தில் உள்ள கவியப்புள்ளியில் கிடுத்து, எந்தழிப்புள்ளியில் கிடுத்து வியும்போது பெறக்கூடிய திசைவேகத்தைப்போல் n மடங்கு திசை வேகத்துடன் புறப்படுகின்றது. அதன் மற்ருகு கவியத் தூரம் $\frac{\alpha}{\sqrt{n^2-1}}$ எனக் காட்டுக.

[5-ம் கணக்கைப் பார்க்க].

11. ஒரு துகள் μr எனும் மைய எதிர்விசையின் கிள்க்கத்தில் உள்ளது. மைய ஒருக்கின் எப்புள்ளியிலும் அதன் திசைவேகம், மையத்தில் கிடுத்து அப் புள்ளிக்கு விருவதால் விசையும் திசை வேகத்திற்குச் சமம். பாதையின் சமன்பாடு

$$r^2 \cos 2\theta = A \quad (A - \text{மாறு எண்})$$

எனக் காட்டுக.

12. ஒரு மாறாத விசையின் கீழ், ஒரு நிலையான புள்ளியை நோக்கிச் செயல்படும் ஒரு துகள், அதன் ஆரத்திற்கு நிலைக்குதான திசையில், மையப்புள்ளியில் ஓய்வில் கிடுத்து, ஏவு புள்ளியை அடையும் வரை பெரும் திசைவேகத்துடன், ஏவப்படுகிறது. அதன் பாதை

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3 = \cos^2 \frac{1}{2}\theta$$

எனக் காட்டுக. கிதுதியில் அதன் பாதை ஒரு நேர்க்கோட்டாக அமையும் எனவும் காண்க. [அதன் கிதுதிப் பாதை மையப்புள்ளியிலு செல்லும் $\theta = \frac{\pi}{3}$ எனும் நேர்க்கோடு].

13. ஒரு துகள் $\frac{h}{mv}$ எனும் மைய முடுக்கத்தை உடையதாக கிடுக்கின்றது. அது α தூரத்தில் உள்ள கவியப்புள்ளியில் கிடுத்து, அதே முடுக்கத்துடன், α ஆரமுள்ள வட்டப்பாதையில் கிள்க்கும்போது பெறக்கூடிய திசைவேகத்தைப் போல $\sqrt{2}$ மடங்கு திசை வேகத்துடன் ஏவப்படுகிறது. அதன் மைய ஒருக்கு

$$r \cos \frac{\theta}{\sqrt{2}} = c$$

எனக் காட்டுக.

14. ஒரு துகளின் மைய முடுக்கம் $\frac{r}{a}(1-\frac{1}{2}\cos\theta)$. அது $5a$ தூரத்தில் உள்ள கலியத்தின் மீது இருந்து ஏவப்படுகிறது. அதன் திசை வேகம் அதே அளவு ஆரமுனை வட்டப்பாதையில் உள்ள திசை வேகத்தின், $\sqrt{5}$ மடங்கு எனில், மைய ஒழுக்கின் மையபாடு

$$r = a(3+2\cos\theta)$$

எனக் காட்டுக.

15. ஒரு துகளின் மைய முடுக்கம் $\frac{r}{a^2}$. அது a தூரத்தில் உள்ள கலியத்தில் இருந்து, அதே அளவு தூரத்தில் அமையும் வட்டப்பாதையின் திசைவேகத்தைப்போல் இருமடங்கு திசைவேகத்துடன் மிதவாக ஆரம்பிக்கின்றது. அதன் மற்ருரு கலியத் தூரத்தைக் காண்க.

[$r = 3a$]

16. m திணிவுள்ள ஒரு துகளின் மீது செயல்படும் மைய நோக்கு விசை $m\frac{r}{a^2}(3+2\cos\theta)$. துகள் விசை மையத்தில் இருந்து a தூரம் உள்ள ஒரு புள்ளியில் இருந்து, $\sqrt{\frac{5}{3}}$ திசைவேகத்துடன், தொடக்கநிலை ஆரத்துடன் $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ எனும் கோணத்தை உண்டாக்கும் திசையில் ஏவப்படுகிறது. துகளின் பாதை $r = a \cot\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)$ எனக் காட்டுக.

17. ஒரு துகள், ஒரு திசையான புள்ளியை நோக்கி $\frac{r}{a^2}$ எனும் முடுக்கவிதியில் கீழ் விழ்க்கின்றது. தொடக்கநிலையில் அது விசை மையத்தில் இருந்து $3a$ தூரத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. எதிர்நாளத்தையும், விசை மையத்தையும் செங்குத்தும் கோட்டிற்கு $\cot^{-1}\frac{1}{2}$ ன் சாய்ந்த திசையில், $\sqrt{\frac{109}{180}} \cdot \frac{1}{a}$ வேகத்துடன் அது ஏவப்படுகிறது. அதன் பாதை $r = \frac{1}{2}$ உள்ள நீள் வளைப்பாதை எனக் காட்டுக. மேலும் துகள், விசைமையத்தில் இருந்து செங்குக்கடிவ மீப்பெரு தூரத்தைக் காண்க. துகளையும், விசைமையத்தையும் செங்குத்தும் கோடு 90° சுழன்ற பிறகு, அவை பிரிண்டிற்கும் கிடைசே உள்ள தூரத்தையும் காண்க.

[$r = 30a$; $r = \frac{1}{2}a$]

18. m திணிவுள்ள ஒரு துகள், $\frac{m\mu}{(தூரம்)^2}$ எனும் மையநோக்கு விசையுடன், விசைமையத்திலிருந்து, a தூரத்தில் உள்ள புள்ளியில் இருந்து, ஆரத்துடன் α கோணம் உண்டாக்கும் திசையில் ஏவப்படு

கிறது. அதன் தொடக்கத் திசையெனக் கத்தழிப் புள்ளியில் இருந்து, எந்தாளத்திற்கு விழும்போது அடையக்கூடும் திசை வேகத்திற்குச் சமமெனின், மைய ஒழுக்கின் சமன்பாடு $r=a\theta \cot(-\phi)$ எனக் காட்டுக.

19. ஒரு துகள், $\frac{r^2(r+2a)}{r^2}$ முடுக்கத்தை உண்டாக்கக்கூடிய விசை விக் கீழ் ஒரு புள்ளியை நோக்கிச் செல்படுகிறது. அது $(a, 0)$ எனும் புள்ளியில் இருந்து, கத்தழியில் இருந்து அடையக்கூடிய திசையேகத் துடன், தொடக்கக் கோட்டுடன் $\cot^{-1} 2$ கோணத்தினையிற் ஏவப்படுகிறது. மைய ஒழுக்கின் சமன்பாடு, $r=a(1+2\sin\theta)$ என்று நிறவுக. அதன் கவியத் தூங்கியையும், கவியக் கோணத்தையும் காண்க. $[r=a, 3a; \pi]$

20. ஒரு துகள், $\mu \left[u^3 - \frac{a^3}{3} u^7 \right]$ மைய முடுக்கத்துடன், மைய விசையிலிருந்து a தூரத்தில் உள்ள புள்ளியில் இருந்து புறப்படுகிறது. அதன் தொடக்கத் திசையெனக், அதே தூரத்தில் அமைந்த வட்டப் பாதையில் செல்லும்போது அடையும் திசையேகத்தைப் போன்று $\sqrt{\frac{25}{7}}$ மடங்கு. அது ஞாத்தினையுடன் $\tan^{-1} \left(\frac{4}{3} \right)$ கோணம் சரித்த நிலையில் புறப்பட்டால், அதன் பாதை

$$4r^2 - a^2 = \frac{3a^2}{(1-\theta)^2}$$

எனக் காட்டுக.

21. ஒரு துகள், $\mu [3u^3 + a^2 u^7]$ மைய முடுக்கத்துடன் இயங்குகின்றது. விசைமையத்தில் இருந்து a தூரத்தில் உள்ள புள்ளியில் இருந்து, $\frac{\pi}{4}$ சாய்ந்த திசையில், அதே தூரத்தில் உள்ள வட்டப் பாதையில் திசையேகத்துடன் ஏவப்பட்டால், அது விசை மையத்தை அடைய எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம்

$$\frac{a^3}{\sqrt{2}\mu} \left[2 - \frac{\pi}{2} \right]$$

எனக் காட்டுக.

$$[\text{குறிப்பு: } \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 = \left(\frac{a^2 + r^2}{2a} \right)^2]$$

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= -\left(\frac{a^2 + r^2}{2a}\right) \frac{dt}{dt} \\ &= -\left(\frac{a^2 + r^2}{2a}\right) \frac{\sqrt{2g}}{r^2}\end{aligned}$$

22. m திணிவுடைய ஒரு துகள், மீள்சக்தி உடைய (நீட்டப்படக் கூடிய) a நீளமுள்ள ஒரு கயிற்தின் முனையில் கட்டப்பட்டுள்ளது. கயிற்தின் மீட்கிக் குணகம் nmg . கயிற்தின் மறுமுனை ஒரு நிலையான புள்ளியில் கட்டப்பட்டுள்ளது. துகள் a தூரத்தில் உட்கன கயிற்ப் புள்ளியில் இருந்து $\sqrt{2gh}$ திசை வேகத்துடன் ஏவப்பட்டால், அதன் மற்ருகு கயிற்த் தூரத்தை

$$nr^2(r-a) - 2pha(r+a) = 0$$

எனும் சமன்பாட்டில் இருத்து பெறலாம் எனக் காட்டுக.

23. கிடைத்தள மட்டத்தில் உட்கன, ஒரு வழவழப்பான வகையத்தில் வழியே செல்லும் ஒரு தூவின் இரு முனைகளிலும் மூலையே M , m திணிவுகள் உட்கன துகள்கள் ஒரு முனைக்கு ஒன்றாகக் கட்டப் பட்டுள்ளன. m திணிவுடைய துகள் தூவிற்குக் கிடைக்குத்தத் திசையில், வகையத்தில் இருந்து a தூரத்தில் ஏவப்படுகின்றது. அதன் பாதையின் சமன்பாடு

$$a = r \cos \sqrt{\frac{m}{M+m}} \theta$$

எனக் காட்டுக.

24. ஒரு வழவழப்பான மேசையின்மீது A எனும் துகள் நகரு கின்றது. A -உடன் AOB எனும் தூல் கட்டப்பட்டு, B -ன் முனையில் A -ன் திணிவுடன் மற்ருகு துகள் கட்டப்பட்டு, மேசையில் உட்கன O எனும் துவரத்தின் வழியே சென்று, O -ஐ செக்குத்ததாகத் தொக்கு கின்றது. தொடக்கத்தில் A , மேசையின் மீது, $OA = a$ இருக்குமாறு,

OA -க்குத் செக்குத்தாக $\sqrt{\frac{9}{2}} ag$ திசைவேகத்துடன் ஏவப்பட்டால், O -வில் இருத்து அதன் தூரம் a , $3a$ இவற்றிற்கிடையே உட்கன நீளத்தில் அகலவும் எனக் காட்டுக.

25. மைய ஒழுக்கில் நகரும் ஒரு துகளுக்கு, ஏதோவொரு வட்டப்பாதையில் நகரும்போதுடன் திசைவேகமும், கத்தழிப்புள்ளியில் இருத்து அத் தூரத்தைத் துகள் அகலும்போதுடன் திசைவேகமும் ஒன்றாக இருக்க வேண்டுமானால், மைய நோக்குவிகை $\frac{1}{r^3}$ -ன் விவிதத் தில் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

[குறிப்பு: $P = \phi'(r)$ என்க
 $V =$ வட்டப்பாதையில் திசைவேகம்
 $V' =$ சுத்தநிழிப்புள்ளியில் இருந்து விழும்போதுள்ள திசைவேகம்.

$$\frac{V^2}{r} = \phi'(r)$$

$$\frac{(V')^2}{2} = -\phi(r) + A$$

$$\therefore 2r \phi(r) + r^2 \phi'(r) = 2rA$$

$$r^2 \phi = Ar^2 + B$$

$$\therefore \phi \propto -\left[\frac{1}{r^3}\right]$$

நான்காம் பரிவு

1. $\frac{F}{r^3}$ எனும் மைய மூடுக்கத்தோடு நகரும் துகளின், ஏதாவது ஒரு புக்கிலிலான திசைவேகம், சுத்தநிழிப்புள்ளியில் இருந்து வந்தடை யும் திசைவேகத்தையடிக்,

குறைந்ததென்றால் மைய ஒழுக்கு நீள்வண்ணம் என்றும்
 சமமென்றால் மைய ஒழுக்குப் பரவண்ணம் என்றும்
 அதிகமென்றால் மைய ஒழுக்கு அதிபரவண்ணம் என்றும்
 காட்டுக.

2. தலைகீழ் வர்க்க விதியைக் கொண்ட மையமூடுக்கத்தோடு நகரும் துகள்,

துகளின் ஏதாவது ஒரு புள்ளியிலான திசைவேகம் $\left. \begin{array}{l} < \sqrt{2} \left[\begin{array}{l} \text{அதே தூரத்தில் அமைந்தவட்டப்} \\ \text{பாதையில் ஆன திசைவேகம்} \end{array} \right] \\ > \sqrt{2} \left[\begin{array}{l} \text{பாதையில் ஆன திசைவேகம்} \end{array} \right] \end{array} \right\}$
 என்பதைப் பொறுத்து முறையே நீள்வண்ணம், பரவண்ணம் அதிபர வண்ணம் பாதைகளில் அமையும் எனக் காட்டுக.

3. சூரியனில் இருந்து பெரும் தூரத்தில் இருக்கும்போது v_1 சிறும தூரத்தில் இருக்கும்போது v_2 எனும் திசைவேகங்களைவுடைய ஒரு கோளூக்கு (Planet)

$$(1-e) v_1 = (1+e) v_2$$

எனக் காட்டுக.

[கோள், சூரியனைச் சுற்றி ஒரு நீள்வண்ணப் பாதையில் வருகிறது என அறிவோம்].

4. ஒரு கோளின், சூரியனைச் சுற்றிய பாதையில் பெரும், சிறும திசைவேகங்கள் முறையே 30 கி. மீ./வி., 29.2 கி. மீ./வி. எனில், பாதையின் மையத் தொலைத் தகவு (e) என்ன? $\left[\frac{1}{74}\right]$

5. ஒரு துகள் μ/r^2 ஹய முடுக்கத்தோடு, நீள்வட்ட வடிவ பாதையில் செல்கின்றது. சிற்றச்சின் மூலையில் அதன் வேகம், துகளின் பெரும், சிறும வேகங்களின் பெருக்குச் சராசரி எனக் காட்டுக.

6. ஒரு துகள், விசைஹயத்தைக் குவியலாகக் கொண்டு ஒரு நீள்வட்ட வடிவ (அதிபரவளைவு) பாதையில் செல்கின்றது. ஒரு குவிய தாளின் மூலையில் ஆன திசை முடுக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல், [குவியத்தின் வழிச் செல்லும்] செவ்வகவத்தின் மூலையில் ஆன திசைவேகத்தின் வர்க்கத்தின் இரு மடங்காரும் எனக் காட்டுக.

7. ஒரு கோளின் பெரும், சிறும கோணவேகங்கள் $n:1$ என்ற விகிதத்தில் இருந்தால், கோளின் பாதையின் $e = \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$ எனக் காட்டுக.

8. ஒரு துகள், குவியத்தை விசைஹயமாகக் கொண்ட, நீள் வட்ட வடிவ பாதையில் செல்கின்றது. கோண வேகங்களின் பெரும், சிறும மதிப்புகள் நீட்டச்சின் மூலையில் அமைகின்றன எனக் காட்டு. இவை முறையே α , β எனில், சராசரிக் கோணவேகம் $\frac{(2\alpha\beta)^{1/2}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}$ எனக் காட்டுக.

$$\left[\text{சராசரிக் கோணவேகம்} = 2\pi + \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \right]$$

9. குவியத்தை விசைஹயமாகக் கொண்ட ஒரு நீள்வட்ட வடிவ பாதையில், $\frac{h}{r^2}$ எனும் விதிப்படி தகரும் துகளின் பாதை அமைகின்றது. விசைஹயத்தில் இருந்து r தூரத்தில் V எனும் வேகத்தோடு துகள் ஏவப்படுகிறது. துகளின் காலவட்ட நேரம் (Periodic Time)

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \left[\frac{2}{r} - \frac{V^2}{h} \right]^{-3/2}$$

எனக் காட்டுக.

10. ஒரு கோள், சூரியனைக் குவியலாகக் கொண்ட நீள்வட்டப் பாதையில் இருக்கின்றது. அதன் நீட்டச்சு $2a$, மையத் தொலைத்தகவு

(eccentricity) e , ஊரவட்டநேரம் T எனில், குவியனுக்கு எதிர்த் திசையில் கோளின் வேகம் உச்சமதிப்பை அடைய, பாதையின் நீட்டச் சுற்று, கோளின் ஆரம் குத்தாக இருக்கவேண்டும் எனக் காட்டுக. அக்வேகம் $\frac{2\pi a e}{T\sqrt{1-e^2}}$ எனவும் காட்டுக.

11. தனிக்கு வர்க்க விதியின்படி நீர்வட்டத்தில் அமைவும் ஒரு துகளுக்கு, சிற்றச்சின் முனையில் வேகம் V . கிப்புள்ளியில் வேகம் V_1 என்று அதிவிரைப்பட்டால் பாதை பரவலைவசை மாறுகின்றது. $V_1^2 = 2V^2$ எனக் காட்டுக.

12. குவியத்தை விசைமையமாகக் கொண்டு ஒரு துகள் மையத் தொலை தகவு e உட்கே நீர்வட்டப் பாதையில் கிவங்குகின்றது. துகள் சிற்றச்சின் ஒரு முனையில் இருக்கும்போது, திசைவேகம் இரு மடங்குகின்றது. துகளின் புதுப்பாதை $\sqrt{9-8e^2}$ மையத் தொலை தகவாகக் கொண்ட ஓர் அதிபர வளைவு எனக் காட்டுக.

கீத்தாம் செவு

1. PR என்ற மையவிலகையில் கீழமைந்த நீர்வளையப் பாதையில், P எனும் ஏதாவது ஒரு புள்ளியில் துகளின் வேகம், OP -ன் துணை விட்டத்தின் நீளத்தின் விகிதத்தில் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

2. ஒரு துகள் மையப்புள்ளியை நோக்கிய, மைய விலகியின்கீழ், ஒரு நீர்வளைபாதை அமைக்கின்றது. v, v_1, v_2 முறையே செவ்வகம், நேட்டச்சு, சிற்றச்சு கிவற்றின் முனைகளில் ஆன திசைவேகம் எனில்

$$v^2 v_2^2 = v_1^2 (2v_2^2 - v_1^2)$$

எனக் காட்டுக.

3. ஒரு துகள், மையப்புள்ளியை நோக்கிய மையவிலகியின்கீழ், ஒரு நீர்வளைபாதை அமைக்கின்றது. சிற்றச்சின் முனையில் திசை வேகம் V என்றும், ஒரு நேரடி கிணைவிட்டங்களின் முனைகளில் வேகம் v_1, v_2 என்றும் கொண்டால்,

$$v_1^2 + v_2^2 = V^2 + \mu b^2$$

எனக் காட்டுக. (சிற்றச்சின் நீளம் $= 2b$)

4. ஒரு துகள், மையப் புள்ளியை நோக்கிய மைய விலகியின் கீழ், ஒரு நீர் வளைபாதையில் கிவங்குகின்றது. ஒரு குவியத்தைப் பற்றிய துகளின் கோணவேகம், அக் குவியத்தில் இருந்து உட்கே தூரத்திற்கு எதிர்த் திசையில் அமைவும் எனக் காட்டுக.

5. சமதளத்தில் இயங்கும் ஒரு துகளின் முடுக்கம் ஒரு நிலையான புவிக்கு நேர் எதிர்த்திசையில், அப் புவிவியில் இருந்து கடன் தூரத்தின் விகிதத்தில் அமைகின்றது. துகளின் பாதை ஒர் அதிபர வளைவு எனக் காட்டுக.

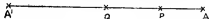
6. ஒரு துகளின் முடுக்கக் கூறுகள் $-k^2x$, $-k^2y$. திசை முறையே Ox , Oy திசைகளில் இருக்கின்றன. துகள் தொடக்கத்தில் (a, b) என்ற புவிவியில் ஓய்வில் இருக்கின்றது. அது $2ay^2 = b^2(x+a)$ என்ற பரவளைவின் மேல் அமையக்கூடும் பெரும் எனக் காட்டுக. முதல் முதலில் பாதை y அச்சைக் கடக்கும் விடத்தில் அதன் திசை வேகத்தைக் காண்கிறது.

$$\left[\sqrt{\frac{1}{2}k(b^2+a^2)}; OX\text{-க்கு } \pi + \tan^{-1} \frac{b}{2\sqrt{\frac{1}{2}ka}} \text{ சாய்ந்த திசையில்} \right].$$

10. தனியிசை விபக்கம் (Simple Harmonic Motion)

10.1. தனியிசை விபக்கம்

1. விளக்கம் : நேர்சோட்டில் விபக்கும் ஒரு துகளின் முடுக்கத்தின் அளவு, அக் கோட்டிற்குக்கும் ஒரு புள்ளியிலிருந்துள்ள அதன் தூரத்தின் நேர் விகிதத்திலும், முடுக்கத்தின் திசை எப்போதும் புள்ளியையே நோக்கியும் அமைந்தால் அத்தகைய விபக்கம் (நேர்ச் சோட்டில்) தனியிசை விபக்கம் எனப்படும். இதை S. H. M. (Simple Harmonic Motion) எனக் குறிப்போம்.



படம் 104.

2. இயக்கத்தின் பண்பை ஆராய்தல் : துகள் விபக்கும் நேர்ச் சோடு $A'A$ ஆகும். O என்பது சோட்டில் உள்ள ஒரு புள்ளி. P என்பது ' t ' நேரத்தில் துகளின் நிலை. OA திசையை நேர்த்திசை யாகக் (Positive direction) செல்வோம்.

$$OP = x \text{ என்க.}$$

எப்போது அதன் முடுக்கம் $\frac{d^2x}{dt^2}$

தனியிசைவிபக்க விளக்கப்படி

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x$$

$$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} + \mu x = 0$$

$$D = \frac{d}{dt} \text{ எனின்}$$

$$(D^2 + \mu)x = 0$$

இந்த வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டின் நிர்வக

$$x = A \cos(\sqrt{\mu} t + B) \quad \dots\dots(1)$$

A, B என்ற பொதுநிலை எண்களின் மதிப்பு, புறப்பகு நியதி அளக்கு (Initial condition) ஏற்ப டாறும். 't' நேரத்தில் துகளின் வேகம்

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\sqrt{\mu} \sin(\sqrt{\mu} t + B) \quad \dots\dots(2)$$

3. புறப்பகு நியதிகள்: $t=0$ எனும் போது x -ன் மதிப்பு a ,

$$v = 0 \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore a = A \cos B \quad 0 = -A\sqrt{\mu} \sin B$$

$$\therefore B = 0 \quad \therefore A = a$$

\therefore சமன்பாடுகள் (1), (2)

$$x = a \cos \sqrt{\mu} t \quad \dots\dots(3)$$

$$v = -a\sqrt{\mu} \sin \sqrt{\mu} t \text{ என வருகிறது} \quad \dots\dots(4)$$

$$\therefore v^2 + \mu x^2 = a^2 \mu$$

$$\therefore v^2 = \mu(a^2 - x^2) \quad \dots\dots(5)$$

என விவரிக்கத்தின் பண்பை விவரிக்கும் மூன்று சமன்பாடுகள் வருகின்றன.

(i) கிள்ள நேரத்தில், துகளின் நிலை என்ன

(ii) அந்த நேரத்தில் துகளின் வேகம் என்ன

(iii) ஒரு குறிப்பிட்ட நிலையில் அதன் வேகம் என்ன எனும் விவரிக்கத்தைப் பற்றிய செய்திகளை இந்த மூன்று சமன்பாடுகள் தருகின்றன.

4. தமிழியல் விவரிக்கத்தின் காலம் (Period of S. H. M.)

' t_1 ' நேரத்தில் துகளின் நிலை x_1 ஆகும்.

அதன் வேகம் v_1 ஆகும்.

$$\therefore x_1 = a \cos \sqrt{\mu} t \quad v_1 = -a\sqrt{\mu} \sin \sqrt{\mu} t$$

$$\text{கிள்ளும் } \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \text{ காலம் சென்றால் } t = t_1 + \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$$

அப்போது

$$\begin{aligned}x &= a \cos \sqrt{\mu} \left(t_1 + \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \right) \\&= a \cos \sqrt{\mu} t_1 + 2\pi \\&= a \cos \sqrt{\mu} t_1 \\ \therefore x &= x_1 \quad \text{மீதேயும} \\v &= v_1\end{aligned}$$

ஆகவே ஒவ்வொரு $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ கால அளவிற்குப் பிறகு துகள் திரும்பத் திரும்ப ஒரே நிலைக்கு ஒரே வேகத்துடன் வரும். இந்தக் கால அளவை T எனக் குறித்தால் $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$
 T எனும் கால அளவு தனிமிகை வியக்கத்தின் அலைவு காலம் (Period of S. H. M.) எனப்படும்.

[குறிப்பு: $x = A \cos (\sqrt{\mu} t + B)$ எனும் சமன்பாட்டைக் கொண்டு A ல் மீதே முடிவு வரும். ஆகையால் அலைவு காலம், புறப்படு நியதி களைப் பொறுத்தவரது என வருகிறது.]

5. வீச்சம் (Amplitude): $x = a \cos \sqrt{\mu} t$ என்றால் மியக்கம் $x = a$, $x = -a$ என்ற நிலைகளுக்கிடையே நிகழ்கிறது என அறிவினும் O என்ற புள்ளிக்கு இருபுறமும் 'a' தூரத்திற்குமேல் துகள் போகாது. இந்தத் தூரம் 'a', தனிமிகை வியக்கத்தின் வீச்சம் எனப்படும். 'வீச்சம்' அலைவு காலத்தைச் சார்ந்ததன்று எனவும் தெளிவாகிறது.

6. முழு அலைவு (Complete Oscillation): துகள் ஒரு நிலை மீட்டுந்து புறப்பட்டு அதே நிலைக்கு அதே திசையில் உட்கன வேகத்தில் அடுத்ததாற்போல் வருவது ஒரு முழு அலைவு எனப்படும். A -மிருந்து புறப்பட்டு A -க்கு மீண்டுவருவது முழு அலைவு எனவாகும். இந்தகாலம் காலம் அலைவு காலம் $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ எனவும் அறிவினும். தனிமிகை வியக் கத்தைக் கூறும்போது முழு அலைவை, 'அலைவு' (Oscillation) எனவும் கூறுவது வழக்கம்.

குறிப்பு: ஒரு வினாடியில் n அலைவுகள் எவ்வால், ஒர் அலைவுக்¹ குண்ட காலம் $\frac{1}{n}$

$$\therefore \text{அலைவு காலம் } T = \frac{1}{n} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$$

(மூடுக்கம் = $-\mu x$ எனினர்).

கணக்கு 1: தனி பிசையெக்கத்தில் ஒரு துகளின் அலைவுகள் ஒரு நிமிடத்தில் 100 ஆகிறது. அதன் மிகுந்த வேகம் வினாடிக்கு 20 அடி என்றும் அதன் வீச்சுத்தொடையும், மிகுந்த முடுக்கத்தொடையும் கணக்கிடுக. தனிபிசையிப்பக்க எமபத்திற்கும், அதன் அலைவு முடிவுக்கும் தடு எமபத்திற்கு அதன் வேகம் என்ன? (M. U. Sepa. 66).

புதனிபிசை வியக்கம் ஆத்திரங்கள் :

$$x = a \cos \sqrt{\mu} t$$

$$v = -a\sqrt{\mu} \sin \sqrt{\mu} t$$

$$v^2 = \mu (a^2 - x^2)$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \quad \text{முடுக்கம்} = -\mu x$$

$$\text{மிகு } T = \frac{60}{100} = \frac{3}{5} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \quad \therefore \sqrt{\mu} = \frac{10\pi}{3}$$

$$\text{மிகுந்த வேகத்தின் அளவு} = a\sqrt{\mu} = 20$$

$$\therefore a = \frac{20}{\sqrt{\mu}} = \frac{60}{10\pi} = \frac{6}{\pi}$$

$$(i) \therefore \text{வீச்சம்} = \frac{6}{\pi} \text{ அடி.}$$

$$\begin{aligned} (ii) \text{ மிகுந்த முடுக்கத்தின் அளவு} &= \mu a = \frac{100\pi^2}{9} \times \frac{6}{\pi} \\ &= \frac{200\pi}{3} \text{ ft/sec}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (iii) x &= \frac{3}{\pi} \text{ என்றால் } v = \sqrt{\mu} \sqrt{a^2 - x^2} \\ &= \frac{10\pi}{3} \sqrt{\frac{36}{\pi^2} - \frac{9}{\pi^2}} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{கேட்கப்பட்டிருக்க வேகம்} = 10\sqrt{3} \text{ ft/sec.}$$

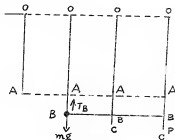
4. கணக்கு 2: மீள் வியப்புடைய, எடைமற்றாத நிறுமடக் கூடிய துகளின் வியத்தை நீளம் a , மீள் வியப்பு குணகம் λ . அந்த துகள் ஒரு புள்ளியிலிருந்து தொடங்குகிறது. மற்றொரு துகளிலிருந்து தனிபிசையின் ஒரு துகளைக் கட்ட துகள் b துகள் நீண்டு துகள் சமநிலையில் உள்ளது. துகள் மீளும் c துகள் கீழே ($c < b$) மிகுந்தவெட்டாக ஏற்படும் வியக்கத்தை ஆராய்க.

படத்தில் $OA = a$

$OB = a + b$

$OC = a + b + c$

'1' நேரத்தில் தூண் P என்ற நிலையில் $BP = x$ எனும்படி இருக்கட்டும்.



படம் 105.

(i) B என்ற நிலையில் தூண் சமநிலையில் உள்ளது; T_B மிழுவிறை

$$\therefore T_B = mg$$

ஆனால் Hooke's விதிப்படி $T = \frac{\lambda b}{a}$

$$\therefore \frac{\lambda b}{a} = mg$$

(ii) P என்ற நிலையில் தூணின் முன்க்கை $\frac{d^2x}{dt^2}$ கீழ்க்கேட்கி P -ல் செயல்படும் விசைகள் mg கீழ்க்கேட்கி, மிழுவிறை T_P மேல்கேட்கி. ஆதலால் நிபந்தனை விதிப்படி

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - T_P \quad \text{ஆனால் } T_P = \frac{\lambda(b+x)}{a}$$

$$\therefore m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - \frac{\lambda b}{a} - \frac{\lambda x}{a}$$

$$= -\frac{\lambda x}{a} \quad (mg = \frac{\lambda b}{a} \text{ ஆவதால்})$$

$$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\lambda x}{am}$$

இத்த வகைக்கெழுச் சமன்பாடு தனிமீகைமிமக்கச் சமன்பாடாகும். ஆகவே துகள்

- (i) B-ஐ எம்மகைக்கெண்ணுள்ள தனிமீகைமிமக்கத்தில் மிமக்குகிறது.
- (ii) அதன் வீச்சம் = a ; $a < b$ என்றதால் மிமக்க முழுவதும் துகளின் நீளம் $> a$; ஆகவே மிமுவீகை மறைவதில்லை.
- (iii) மிமக்க காலம் $T = 2\pi\sqrt{\frac{am}{\lambda}}$; $\lambda = \frac{mag}{b}$

$$\text{ஆகையால் } T = 2\pi\sqrt{\frac{b}{g}}$$

கணக்கு B : மேற்கூறிய கணக்கில் $a > b$ என்றால் மிமக்கம் எவ்வளவு நிகழ்கிறது என விவரி. தூறுக்குப் பிரதியாக அதே நீளமும் அதே மீள்மிமப்பு ஆகையுடைய கருள் கம்பமொன்றும் (Spring) மிமக்கம் எவ்வளவு மாறுகிறது?

$$\text{மிமக்கச் சமன்பாடு } \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\lambda x}{am} = -\frac{gx}{b}$$

துகள் B-மிம்குந்து Aஐ அமையும்போது $x = -b$

(B-க்கு மேல் $a (> b)$ தூரம் போகையாதலால் துகள் A எனும் நிலையை வேகம் பூச்சியமாகாமல் அமையும்)

“ $v^2 = a(a^2 - x^2)$ ” என்பது சூத்திரம். மிம்கு

$$\therefore v^2 = \frac{g}{b}(a^2 - b^2).$$

துகளின் வேகம் மேல் நோக்கிவருகிறது. மிமுவீகை மறைந்துவிடுகிறது. (தூர் மிமற்கை நீளத்தை அடைவதால்) துகளின்மேல் புவிமீர்ப்பு வீகை மட்டும் செயல்படுகிறது.

$$\therefore \text{துகள் } \frac{v^2}{2g} \text{ தூரம் மேலே செல்லும்.}$$

$$\text{அதாவது } \frac{g(a^2 - b^2)}{b \cdot 2g} = \frac{(a^2 - b^2)}{b} \text{ தூரம் மேலே சென்று கீழே அதே}$$

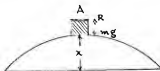
வேகத்துடன் கீழ்நோக்கி விழும். இதற்கு ஆகும் காலம் $\frac{2v}{g}$;

பிறகு மீண்டும் தனிமீகை மிமக்கம் துவங்கும்.

[C-யிலிருந்து புறப்பட்டு விண்டும் C-க்கு வர ஆகும் காலத்தைக் கணக்கிடுக].

(ii) தூரிலேவராமல் கருங்கம்பிலானால், நிறுவினைக் கம்பி விபத்தை நீண்டதையிடக் குறைவாகும் போது தங்குவினை (Thrust) யாகும். ஆகவே முழு விபக்கமும் தனிவினை விபக்கமாகும்.

கணக்கு 4: மேல் கிழாகத் தனிவினை விபக்கத்தில் விபக்கும் தட்டு ஒன்றின் m தனிவிலின் ஒரு துகள் உள்ளது. தனிவினை விபக்கத்தின் வீச்சம் 1 அடி, காலம் 1 செகண்டு கிடைதிறையிலிருந்து $\frac{8}{\pi^2}$ அடி உயரத்தில் தட்டு வரும்போது துகள் தட்டை விட்டு மேலெழும்பிக் கிடைதளத்திற்கு $\left(\frac{\pi^2}{16} + \frac{4}{\pi^2}\right)$ அடி உயரத்திற்குப் போகும் என திடுவுக.



படம் 106.

துகளின் உயரம் கிடைதளத்திற்கு மேல் x ஆகுக. அதன் முடுக்கம் $\frac{d^2x}{dt^2}$; அதன்மேல் செயல்படும் வினைகள் mg கீழ்நோக்கி. தட்டின் தங்குவினை R மேல்நோக்கி.

∴ நியூட்டனின் கிரண்டாவது விதிப்படி

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = R - mg$$

ஆனால் தட்டு தனிவினை விபக்கத்தில் உள்ளதால்

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x \quad \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = 1 \quad (\text{தரப்பட்டுள்ளது})$$

$$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} = -4x^2x$$

$$\therefore -4m\pi^2x = R - m\pi g$$

$$R = m(g - 4\pi^2x)$$

துகை நட்டியிருந்து விடுபடும் நேரம் $R=0$

$$\therefore 4\pi^2x = g = 32$$

$$\therefore x = \frac{g}{4\pi^2} = \frac{8}{\pi^2} \text{ அடி.}$$

(ii) வேகம் v என்றும், மேலே போகும் தூரம் $= \frac{v^2}{2g}$

$$v^2 = 2(a^2 - x^2)$$

$$= 4\pi^2 \left(1 - \frac{g^2}{16\pi^4} \right) \quad [a=1 \text{ எனக் கொள்க.}]$$

$$= 4\pi^2 - \frac{g^2}{4\pi^2}$$

$$\therefore \text{மேலே போகும் தூரம்} = \frac{4\pi^2}{2g} - \frac{g}{8\pi^2}$$

\therefore கிடைதளத்திற்கு மேல் உட்குள் தூரம்

$$= \frac{4\pi^2}{2g} - \frac{g}{8\pi^2} + \frac{2g}{8\pi^2}$$

$$= \left(\frac{4\pi^2}{2g} + \frac{g}{8\pi^2} \right)$$

$$= \left(\frac{\pi^2}{16} + \frac{4}{\pi^2} \right) \text{ அடி.}$$

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. ஒரு நேர்க்கோட்டில் மிவக்கும் ஒரு துகளின் வேகம் $v = R\sqrt{a^2 - x^2}$ எனத் தரப்படுகிறது. இங்கு R , a என்பவை நிலை மாறாதவை; x என்பது கோட்டில் உட்குள் ஒரு புள்ளியிலிருந்து துகளின் தூரம். துகளின் மிவக்கம் தனியினை மிவக்கம் என நிறுவுக. அதன் வீச்சும், காலம் மிவந்ததைக் காணவும்.

2. தனியினை மிவக்கத்தில் உட்குள் துகளின் அலைவுகள் நியமித்த தூரம் 150 சூ.மீ. இதன் மிகுந்த மூலக்கம் 10 அடி/விநாடி². அதன் வீச்சுத் தைக் காண்க.

3. OAB என்ற கோட்டில் தனியினை மிவக்கத்தில் உட்குள் துகளின் வேகம் A , B என்ற நிலைகளில் O சூ.மீ. $OA=a$, $OB=b$;

AB -யின் மையத்தில் வேகம் v என்றால் அந்வேகம் $\frac{\pi(b-a)}{v}$ எனக் காண்க.

4. தளியினை மியக்கத்தில் உள்ள துகளின் வேகம் O என்ற புள்ளியிலிருந்து x_1 தூரத்தில் v_1 , x_2 தூரத்தில் v_2 என்றால் அந்வேகம் $2\pi\sqrt{\frac{x_1^2 - x_2^2}{v_2^2 - v_1^2}}$ என நிதவுக.

5. தளியினை மியக்கத்தில் வீச்சம் a , காலம் $\frac{1}{n}$, துகளின் வேகம் மிகுந்த நேரத்திற்கும், அதில் பாதியாக மிகுக்கும் நேரத்திற்கும் உள்ள காலம் $\frac{1}{6n}$ எனக் காண்க.

6. தொக்கவிடப்பட்டுள்ள கருக்கம்பியின் மற்ற துளியில் 1 பவு. கல்லைக் கட்டினால் 3 அங்குலம் நீங்குகிறது. அதில் 4 பவு. கல்லைக் கட்டி மிகுத்துவிட்டால் ஏற்படும் தளியினை மியக்கத்தில் அந்வேகம் $\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$ எனக் காண்க.

7. ஒரு கருக்கம்பியின் துளியில் ஒரு துகளை மாட்டி அது π தூரம் நீங்குகிறது. அதைக் கீழே மிகுத்துவிட்டால் அந்வேகம் $2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ எனக் காண்க.

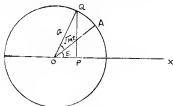
8. ஒரு துகள் ஒரு வலுவழுப்பான மேசைமீதுள்ளது. அது மிகு புறமும் ஒன்று போன்றதன் சம நீளமான கருக்கம்பியைக் மிகுத்துக் கட்டப்படுகிறது. துகளைச் சம நிலையிலிருந்து கட்டப்பட்ட பக்கம் நகர்த்திவிட்டால் ஏற்படும் மியக்கம் தளியினை மியக்கம் எனக் காட்டுக. அதன் காலம் $2\pi\sqrt{\frac{ml}{2\lambda}}$ என நிதவுக. [m துகளின் திணிவு, l கம்பியின் நீளம், λ அதன் மீள் மியக்கப் குணகம்.]

9. மீள்மியக்கமுடைய ஒரு துளியின் மியக்கை நீளம் l . அதன் ஒரு துளி A என்ற புள்ளியில் கட்டப்பட்டுத் தொக்கவிடப்படுகிறது. மற்ற துளியில் ஒரு துகளை மாட்டி, நீளம் l_1 ஆகிறது. துகளை A என்ற மிகுத்திலிருந்து கீழேவிட அது $l_1 + \sqrt{l_1^2 - l^2}$ தூரம் விடுகிறது எனக் காண்க.

10. m_1 , m_2 என்ற திணிவுகள் உள்ள மிகு துகள்கள் ஒரு திசை மீள்வாத கருக்கம்பியை மிணக்கப்பட்டு வலுவழுப்பான மிடை

தளத்தில் உள்வளை. m_1 இ் திசையிருத்தி, எம்பெயைச் சுற்றே நீட்டி. m_2 -வை இயங்கவைத்தால் அதன் காலம் $\frac{1}{n}$. m_2 இ் திசையிருத்தி, அதே போல m_1 இ் இயங்க வைத்தால் காலம் $\frac{1}{n} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$ எனவும், இரண்டும் இயங்கிறால் காலம் $\frac{1}{n} \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}}$ எனவும் காண்க.

10-2. தனியிணை வியக்கமும் வட்ட இயக்கமும்



படம் 107.

ஒ ஂதும் துகள் O-வை மையமாகவும் 'a' நீளம் ஆரமும் உள்வளை வட்டத்தில் \sqrt{p} ஂதும் சீரான கோணவேகத்துடன் இயங்கட்டும். அப் போது அது ஒருமுறை சுற்றிவர ஆகும் காலம் $\frac{2\pi}{\sqrt{p}}$.

வட்டத்தின் விட்டம் OX-ன் மேல் Q-ன் வீழல் P ஆகுக.

't' நேரத்தில் OP = x ஆகுக. XOQ = θ ஆகுக.

$$\therefore x = a \cos \theta$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = -a \sin \theta; \quad \frac{d\theta}{dt} = -a \sqrt{p} \sin \theta$$

$$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} = -a \sqrt{p} \cos \theta; \quad \frac{d\theta}{dt} = -a \sqrt{p} \cos \theta$$

$$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} = -px \quad [x = a \cos \theta \text{ ஆனதால்}]$$

\therefore Q, வட்டப் பரதியில் \sqrt{p} ஂதும் சீரான கோணவேகத்துடன் இயங்கும்போது, விட்டத்தின்மேல் அதன் வீழல் O-வை மையமாகக் கொண்டு தனியிணை வியக்கத்தில் இயங்குகிறது.

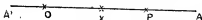
P-யின் தனிவிசை வியக்கத்தை Q-யின் வட்ட வியக்கத்தால் ஆராயலாம்.

Q-யின் புறப்படுகில் கிடம் A ஆகுத. $\angle XOA = t$ ஆகுத. அப்போது $t=0$; 't' நேரம் சென்றதும் $\angle AOQ = \sqrt{\mu} t$

$$\therefore \theta = \sqrt{\mu} t + e \quad \therefore P\text{-யின் நிலை } x = a \cos(\sqrt{\mu} t + e)$$

$\sqrt{\mu} t + e$ எனும் கோணம் நிலைக்கு கோணம் (Phase) எனப்படும். e எனும் கோணம் தொடக்கநிலைக் கோணம் (Epoch) எனப்படும்.

ஒரே நேர்கோட்டில் அமையுந் திரண்டு தனிவிசை வியக்கத்தின் கூடுதல் காண்க.



படம் 108.

X-இ அமையுமாக்கி கொண்ட தனிவிசை வியக்கத்தில் P, A' X A எனும் கோட்டில் வியக்கப்படும். அதே கோட்டில் O எனும் புள்ளியை அமையுமாக்கி கொண்டு X, தனிவிசை வியக்கத்தில் வியக்கப்படும். அப்போது O-வைச் சேர்ந்த P-யின் வியக்கம் கீழ்விரண்டின் கூடுதலாகும்.

தனிவிசை வியக்கச் சூத்திரங்களிற்

$$XP = a \cos(nt + e)$$

$$OX = a' \cos(n't + e')$$

$$[\sqrt{\mu} = n, \sqrt{\mu'} = n' \text{ எனப் பிரதியிட}]$$

\therefore O-வைச் சேர்ந்த P-யின் கிடப்பெயர்த்தி

$$OP = a \cos(nt + e) + a' \cos(n't + e')$$

ஒரே நிலையு காலமுள்ள திரு தனிவிசை வியக்கக் கூடுதல் அந்நேர காலம் சமனானால் $n=n'$

$$\therefore OP = a (\cos nt + e) + a' \cos (nt + e')$$

$$= A \cos (nt + E)$$

$$\text{கிலு } A \cos E = a \cos e + a' \cos e'$$

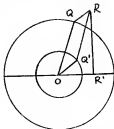
$$A \sin E = a \sin e + a' \sin e'$$

ஆகவே கூடுதலும் அதே காலமுள்ள தனிவிசை வியக்கம் எனக் காண்கிலேம். இதன் வீச்சம் A; தொடக்கநிலைக் கோணம் E.

$$\therefore A^2 = a^2 + a'^2 + 2aa' \cos(e - e')$$

$$\tan E = \frac{a \sin e + a' \sin e'}{a \cos e + a' \cos e'}$$

வட்ட இயக்கத்தால் காட்டல்



படம் 109.

Q, Q' என்பவை 'n' என்ற சீரான கோணவேகத்தால் a, a' என்ற ஆரங்களுடைய பொதுமைய வட்டங்களில் இயங்கும். 't' நேரத்தில் அவற்றின் நிலைகள் Q, Q' ஆகும். OQ, OQ' என்ற அடுத்த பக்கங்களுடைய இணைகள் OQ' RQ ஆகும். அப்போது Q, Q' வட்டங்களில் இயங்க, R-ம் வட்டத்தில் இயங்கும், அதன் வீழ்ச்சி R', இரு தனியினச யியக்கங்களின் கூடுதலான தனியினச யியக்கத்தில் இயங்கும்.

$$R'OQ = e, \quad R'OQ' = e' \text{ என்றும்}$$

$$OR^2 = A^2 \text{ எனவும் } R'OR = E \text{ எனவும்}$$

காணம் எனும்.

அலைவு காலம் சமமாக இல்லாவிடும்

தனியினச யியக்கங்களின் கூடுதல் தனியினச யியக்கமாகாது. $n' = n + \lambda$ ஆகும். λ மிகச் சிறியதாக இருக்கும்.

$$x = a \cos(nt + e) + a'(\cos nt + \lambda t + e')$$

$$\lambda t + e' = e_1 \text{ என இருக்க.}$$

$$\therefore x = A \cos(nt + E)$$

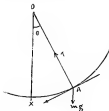
$$\begin{aligned}
 A^2 &= a^2 + a'^2 + 2aa' \cos (e_1 - e) \\
 &= a^2 + a'^2 + 2aa' \cos (\lambda l + e' - e)
 \end{aligned}$$

ஆகவே அப்படி ஏதே நிறங்கூட எனக் காண்கிறோம். கிபக்கமும் ஏதேகுறைய தனிவிசை கிபக்கத்தைப் போன்று இருக்கிறது.

தனியூசலி (Simple Pendulum)

10.3. தனியூசலி

கிழம்புத நிறையற்ற குறுக்கத்த ஒரு தூளின் ஒரு தூளி O என்ற கிட்டத்தில் கட்டப்பட்டும். மற்ற தூளி A-யில் ஈ திணிவுள்ள ஒரு பொருள் கிணைக்கப்பட்டும். கிவ்வாறு தொங்கும் தூலி நிலைக் கோட்டிலிருந்து சந்தே அகற்றி விடுவோமாக. கிவ்வாறு உள்ள தூலும் தூர் தூளியில் கிபங்கும் பொருளும் சேர்த்த தனியூசலி (Simple Pendulum) எனப்படும்.



படம் 110.

[குறிப்பு: தூலுக்குப் பதிலாக, நிறையற்ற குச்சியும் (light rod) இருக்கலாம்].

தனியூசலியின் கிபக்கம்

OA-யின் நீளம் l ஆகும்.

OX என்பது கீழ்தோக்கியுள்ள கிடைகோடு

‘ θ ’ கோணத்தில் $\angle XOA = \theta$ ஆகும்.

A-யில் செயல்படும் விசைகள், mg எனும் கீழ்ப்பு விசையும் T எனும் AO திசையில் உள்ள கிழுவிசையுமாகும். O-வை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தில் A கிபங்குவதால், கோணமதிசையாகும் திசையில் A-யில் குறுக்கத்தின் தொகுக்கோட்டுப் பிழை $= l \frac{d^2\theta}{dt^2}$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{அதே திசைக்கு எதிராகவுள்ள வெகிவிசைப் பிழை} \\
 = mg \sin \theta
 \end{aligned}$$

∴ லியக்கச் சமன்பாடு

$$\begin{aligned} \text{and } \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -ng \sin \theta \\ &= -ng \theta \quad [\theta \text{ மிகவும் சிறியதும் } g \text{ உடைய } \\ &\quad \text{அளவின் துணைதலாக}] \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g\theta}{l} = -p^2\theta \quad \left[p = \frac{g}{l} \right]$$

இது தளியிசை யியக்கச் சமன்பாடாகும்.

∴ ஊசலின் லியக்கம் $X \cdot Y$ கையமக்கக் கொண்ட தளியிசை யியக்கமாகும்.

$$\text{இதன் அலைவு காலம்} = \frac{2\pi}{\sqrt{p}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\therefore \text{தளியுசலியின் அலைவு காலம் } T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\text{ஒரு வினாடியில் } n \text{ அலைவுகளாவின் } T = \frac{1}{n}$$

குறிப்பு: அலைவு காலம், பொருளின் திணிவைச் சாத்ததன்று என அறிவிக்கும்.

வினாடி ஊசலி: அலைவு காலம் 2 வினாடியானால் அத்தகைய ஊசலி, வினாடியுசலி (Seconds Pendulum) எனப்படும்.

$$\text{அதன் நீளம்: } 2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\therefore 1 = \frac{\pi l}{g} \quad \therefore l = \frac{g}{\pi^2}$$

g -ன் மதிப்பு 981 செ.மீ./(வினாடி)² ஆனால் $l = 99.3$ செ.மீ. என வரும்.

ஒரு நாள் = $24 \times 60 \times 60$ வினாடி.

$$\therefore \text{வினாடியுசலியின் ஒரு தாளைய அலைகள்} = 43,200$$

ஆனால் நீளம் கூடவோ குறையவோ செய்தால் இது மாறுபடும். அதுபோன்று ' g ' மாறுபட்டாலும் அலைவு காலம் மாறுபடும்.

1) அலைவுகால மாறுதல்

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\therefore \log T = \log 2\pi + \frac{1}{2} \log l - \frac{1}{2} \log g$$

$$\therefore \frac{\delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\delta l}{l} - \frac{1}{2} \frac{\delta g}{g}$$

$$(i) 'g' \text{ மாறுபடாததால் } \frac{\delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\delta l}{l}$$

$$(ii) 'l' \text{ மாறுபடாததால் } \frac{\delta T}{T} = -\frac{1}{2} \frac{\delta g}{g}$$

குறிப்பு : ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் அலைவுகள் n ஆனால்

$$nT = t \text{ (காலம்)}$$

$$\therefore \frac{\delta T}{T} = -\frac{\delta n}{n}$$

$$\therefore \frac{\delta n}{n} = -\frac{1}{2} \frac{\delta l}{l} \text{ எனவும் } \frac{\delta n}{n} = \frac{1}{2} \frac{\delta g}{g} \text{ எனவும் காண்கிறோம்.}$$

இடமாறுதலாக g -ன் மாறுதல் : நியூட்டனின் பொது ஈர்ப்புத் தத்துவத்தால் நாம் அறிவது : பூமிக்கு மேலே ஈர்ப்பு சக்தி, புவியை வரத்தியிருந்துள்ள தூரத்தின் வர்க்கத்தின் நேர்விகித விகிதத்தில் மாறும். பூமிக்குக் கீழே அது தூரத்தின் நேர்விகிதத்தில் மாறும்.

$$\therefore g = \frac{k}{r^2} \text{ (பூமிக்கு மேலே)}$$

$$g = \lambda r \text{ (பூமி மட்டத்திற்குக் கீழே)}$$

$$\therefore \frac{\delta g}{g} = -2 \frac{\delta r}{r} \text{ (மேலே)} \quad \frac{\delta g}{g} = \frac{\delta r}{r} \text{ (கீழே).}$$

கணக்கு 1. ஒரு வினாடி ஊசலி ஒரு நாளில் 16 வினாடி நாமத மசைப் போகிறது. அதன் நீளத்தை எவ்வளவு மாற்றவேண்டும்?

16 வினாடி நாமத மென்றால், ஒரு நாளில் அலைவுகளின் குறைவு 8.

$$\frac{\delta n}{n} = -\frac{\delta l}{l} \text{ எனும் குத்திரத்தில் } \delta n = -8$$

$$\therefore -\frac{8}{n} = -\frac{\delta l}{l} \quad \therefore \frac{\delta l}{l} = \frac{16}{n} = \frac{16}{43200}$$

$$\therefore \frac{\delta l}{l} = \frac{1}{27}\%$$

\therefore நீளம் 1-ம் $\frac{1}{27}\%$ குறைக்க வேண்டும். ('I' என்பதை வினாடி பூசலியின் நீளமாகவே கொள்ளலாம்.)

கணக்கு 2 : பூமி மட்டத்தில் சரியாகவுள்ள வினாடி ஊசலியை ஒரு மலைபுச்சிக்குக் கொண்டு சென்றதில், ஒரு நாளைக்கு 10 வினாடி நாமதமாகச் செல்கிறது. மலைபுச்சி பூமி மட்டத்திலிருந்து என்ன உயரத்தில் இருக்கிறது?

கிடைத்தது ;

$$\frac{\delta n}{n} = \frac{\delta g}{g}, \quad \frac{\delta g}{g} = -\frac{2\delta r}{r}$$

$$\therefore \frac{\delta n}{n} = -\frac{\delta r}{r} \quad \text{ஆனால் } n = 43200$$

$$\delta n = -5$$

$$\therefore \frac{\delta r}{r} = \frac{5}{43200}$$

$$\therefore \delta r = \frac{1}{8640} \cdot r$$

$$\therefore \text{உயரம், பூமி ஆரத்தில் } \frac{1}{8640} \text{ பங்கு.}$$

$$r = 3960 \text{ மைல் எவ்ளும்}$$

$$\text{உயரம்} = \frac{3960}{8640} = \frac{33}{72} \text{ மைல்.}$$

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. ஒரு வினாடி ஊசலின் நீளத்தை 1% அதிகரித்தால் ஒரு நாளில் எவ்வளவு வினாடி தாமதமாகப் போகும். (432 வினாடி.)

2. ஒரு வினாடி ஊசல் ஓர் கிடத்தில் ஒருநாளில் 10 வினாடி தாமதமாகவும், மற்ரோர் கிடத்தில் 10 வினாடி கூடுதலாகவும் சென்றால், ரஃபு ஓடுகத்தின் விசைமென்ன? (8640)

3. மேலேதரும் பெட்டி 1 அடி/வினாடி ஓடுகத்தட்டன் மேலே செல்கிறது. அதில் உள்ள தனி ஊசல் ஒரு நிமிடத்திற்கு $\frac{1}{2}$ வினாடி கூடுதலாகச் செல்லும் என நிறவுக.

4. $\frac{1}{2}$ மைல் ஆழமுள்ள சுரங்கத்தின் அடியில் ஒரு வினாடி ஊசல் ஒரு நாளைக்கு 10 வினாடி தாமதமாகச் செல்கிறது. $\frac{1}{2}$ மைல் உயரமுள்ள மலைச்சிமில் ஒரு நாளைக்குக் கயாற் 15-1 வினாடி தாமதமாகச் செல்லும் என நிறவுக. (பூமியின் ஆரம் 4000 மைல்.)

5. பூமிமட்டத்தில் 10 விநாடி ஒரு நாளைக்குக் கூடுதலாகச் செல்லும் வினாடி ஊசல், சுரங்கத்தினடியில் 10 விநாடி தாமதமாகச் செல்கிறது. அதன் ஆழம் என்ன?

11. நிலைமத் திருப்புதிறன் (Moment of Inertia)

11.1.

1. நிலைமத் திருப்புதிறன்: m திணிவுள்ள ஒரு துணிக்கை ஒரு நேர்க்கோட்டிலிருந்து ' r ' தூரத்தில் இருக்குமானால் கோட்டைச் சார்ந்த அதன் நிலைமத் திருப்புதிறன் ($M.I.$) $= mr^2$ என்பதாம்.

m_1, m_2, m_3, \dots எனும் திணிவுகள் உட்கொண்டிருக்கின்ற தூரங்கள் முறையே r_1, r_2, \dots எனவானால், அத்தொகுதியின் கோட்டைச் சார்ந்த $M.I. = \sum m_i r_i^2 (= m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots)$

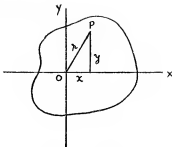
ஒரு விறைப்பொருள் lam துணைவிய துணிக்கைகள் கொண்டது. ஏதேனும் ஒரு துணைப்பகுதியின் திணிவு δm ஆகவும் அதன் தூரம் கோட்டிலிருந்து r ஆகவும் ஆனால், கோட்டைச் சார்ந்த $M.I. = \int r^2 \delta m$ (உரிய எல்லைக்குட்பட்டது.)

2. சுழலகரை (Radius of Gyration): பொருட் தொகுதியின் மொத்தத் திணிவு $= M = \sum m$. அதன் $M.I. = I$. $I = Mk^2$ என்றால் k என்பது பொருள்தொகுதியின் கோட்டைச் சார்ந்த சுழலகரை எனப்படும்.

3. செங்குத்தகைகள் தேற்றம்: ஒரு சமதளத் தகட்டின் தளத்தில் O ஏதேனும் புள்ளியாகு. OX, OY அதே தளத்தில் ஒன்றுதான் கொண்டு குத்தகைகள் இரு கோடுகள். OX, OY இரண்டிற்கும் (அதாவது தளத்திற்கு) குத்தகை OZ எனும் கோட்டைச் கொள்ளோம். OX, OY, OZ எனும் கோடுகளைச் சார்ந்த $M.I.$ முறையே I_x, I_y, I_z எனில்,

செங்குத்து அச்சத் தேற்றம் கூறுவது

$$I_z = I_x + I_y$$



படம் 111.

நிறுபணம் : m திணிவுள்ள துணிச்சை P -ஐத் தாட்டில் கொள்
வோம். P -ன் சர்ட்டிபிக் கூறுகள் (x, y) ஆகும்

$$I_x = \int y^2 dm$$

$$I_y = \int x^2 dm$$

$$OP = r \text{ என்றால்}$$

$$I_z = \int r^2 dm \text{ ஆகும் } r^2 = x^2 + y^2$$

$$\therefore I_z = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm$$

$$\therefore I_z = \int y^2 dm + \int x^2 dm$$

$$\therefore I_z = I_x + I_y$$

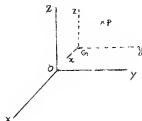
[இத் தேற்றம் சைதனத் தகடுகளுக்கு மட்டுமே பொருத்தம்.]

இரண்டாம் அச்சத் தேற்றம் : ஒரு பொருள் தொகுதியின் ஒரு
கோட்டைச் சர்த்த $M.I. = Mk^2$ ஆகும். அந்தக் கோட்டைக்குப் பொரு
ளின் திணிவுமையம் லாதி இரண்டாவதுள்ள கோட்டைச் சர்த்த
 $M.I. = Mh^2$ ஆகும். இரு கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள ருத்தத் தூரம்
 h எனில், தேற்றம் கூறுவது,

$$Mk^2 = MK^2 + Mh^2 \text{ அல்லது}$$

$$k^2 = K^2 + h^2$$

திருபணம் :



படம் 112.

தரப்பட்டுள்ள கோட்டை Z அச்சாகவும், அதற்குக் குத்தாக OX, OY அச்சுகளையும் கொள்வோம். பொருளின் திணிவு மையத்தின் கூறு (இந்த அச்சுகளைச் சார்ந்தது) (x_0, y_0, z_0) -ஆகுக.

∴ அப்போது OZ-க்குத்து C-யின் தூரம் $h = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$

$$h^2 = x_0^2 + y_0^2$$

P என்பது ஏதேனும் துணிக்கையாகுக. Cx, Cy, Cz என்பவை இவை அச்சுகள்.

XYZ என்பவற்றையொட்டிய P-யின் கூறுகள் X, Y, Z

Cxyz.....x, y, z

$$X = x + x_0 \quad Y = y + y_0$$

$$P\text{-ன் திணிவு} = \delta m$$

$$\therefore OZ\text{-ஐச் சார்ந்த } M.I. = \int (X^2 + Y^2) \delta m = Mk^2$$

$$Cx \text{ } M.I. = \int (x^2 + y^2) \delta m = MK^2$$

Cxyzஐ ஒட்டித் திணிவு மையம் C (0, 0, 0) ஆனதால்

$$\int x \delta m = 0; \quad \int y \delta m = 0$$

$$Mk^2 = \int (X^2 + Y^2) \delta m$$

$$= \int [(x + x_0)^2 + (y + y_0)^2] \delta m$$

$$= \int (x^2 + y^2) \delta m + \int (x_0^2 + y_0^2) \delta m$$

$$+ \int 2xx_0 \delta m + \int 2yy_0 \delta m$$

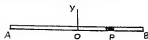
$$\therefore Mk^2 = MK^2 + Mh^2, \text{ [மரத்திரண்டு உறுப்புக்களும் 0]} \\ \text{அல்லது } k^2 = K^2 + h^2$$

11.2. சில குறிப்பிட்ட விறைமொருங்களின் நிலைம கழல் திறன் காணல்

(To find the M.I. of Certain specified rigid bodies)

பொருள்கள் ங்ரவும் சீரான அடர்செறிவு, (density) உள்வள ஂளவும், அது ρ ஂளவும் செரக்வோம்.

! நீளமுள்ள சீரான கம்பு: அதன் மையம் வழி கோலுக்குக் குத்தான கோட்டைச் சர்த்த நிலைம கழல் திறன்



படம் 11.3.

AB ஂளபது சீரான சீரான கம்பு. O அதன் மையம். P ஂறு மிடத்தில் கம்பின் துண் பகுதியைக் செரக்வோம். ஂலை ஂலப்புகள் ங்ரவும் OB திசை x அச்சரவும் செரக்வோம் OP = x ஂஞ்ஞக. துண் பகுதியின் நீளம் dx .

$$\therefore \text{அதன் திணிவு} = \rho dx.$$

[ρ ஂளபது அலகு நீளத்தின் செறிவு (density)]

OY ஂளபது AB-க்குக் குத்தான கோடு.

$$\therefore P \text{ ஂளும் துண்பகுதியின் OYஂச் சர்த்த நிலைம கழல் திறன்} \\ = x^2 \rho dx$$

$$\therefore \text{முழுக்கம்பின் நிலைம கழல்திறன்} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \rho dx$$

(OA = $-\frac{l}{2}$; OB = $+\frac{l}{2}$ ஂஞ்ஞதரக, செரகையில் வரம்புகள் கிவவராகும்).

$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_0^l x^2 \rho dx \\
 &= \frac{l^3 \rho}{12}
 \end{aligned}$$

ஆனால் கம்பின் திணிவு $M = l\rho$

∴ 'I' தளமுள்ள கம்பின் அதன் மையம் வழி அதற்குக் குத்தாகவுள்ள கோட்டைச் சார்ந்த நிலைம அழுத் திறன் $\frac{Ml^2}{12}$ ஆகும்.

$$\text{அழலாரம் } K \text{ எனின் } K^2 = \frac{l^2}{12}$$

குறிப்பு 1 : கம்பின் நீளம் $2a$ எனின்,

$$M.I. = \frac{Ma^2}{3} \quad [l = 2a \text{ எனப் பிரதியிடுக}]$$

குறிப்பு 2 : இவை அச்சங்கள் நேற்றத்தையப் பயன்படுத்தின் கம்பின் ஒரு துணி வழி அதற்குக் குத்தாகவுள்ள கோட்டைச் சார்ந்த நிலைம அழுத் திறன் காவாவாம். அழலாரம் k எனின்,

$$k^2 = K^2 + h^2$$

$$\text{இங்கு } K^2 = \frac{l^2}{12} \quad h = \frac{l}{2}$$

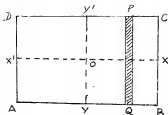
$$\therefore k^2 = \frac{l^2}{12} + \frac{l^2}{4} = \frac{l^2}{3}$$

∴ நிலைம அழுத் திறன் (கம்பின் நீளம் l ஆனால்)

$$= \frac{Ml^2}{3}$$

செய்வகத்தின் நிலைம அழுத் திறன்: ABCD என்பது செவ்வகம். O அதன் மையம்.

$X'OX$ நீளத்திற்கு இணையான கோடு; $Y'OY$ அகலத்திற்கு இணையான கோடு; Oவை மூலப் புள்ளியாகவும் $X'OX$, $Y'OY$ எகப்பவத்தை x , y அச்சங்களாகவும் கொள்வோம். PQ எழும் துண் பருதியின் தூரம் O யிலிருந்து x ஆகுக; $(PQ \parallel YY')$. இதன் திணிவு M ஆகுக. PQயின் நீளம் $= l$.



படம் 114.

நீளம் $AB = a$

அகலம் $CB = b$.

∴ OX எனும் கோட்டைச் சார்ந்த திறன்

$$\text{நிலைம சுழற்சி திறன்} = \frac{IM \cdot b^3}{12}$$

(சென்ற தேற்றத்தின்படி)

மூலச் செவ்வகத்தின், $X'OX$ எனும் கோட்டைச்

$$\begin{aligned} \text{சார்ந்த நிலைம சுழற்சி திறன்} &= \int \frac{b^3}{12} \delta M \\ &= \frac{Mb^3}{12} \end{aligned}$$

[அகலம் b சுழற்சிவதால் சுழலாமை $\frac{b^3}{12}$ எனக் காண்கிறோம்.]

குறிப்பு 1 : இதேபோன்று மையம் வழி, அகலத்திற்கு செண்பாள்ள கோட்டைச் சார்ந்த நிலைம சுழற்சி திறன் $\frac{Ma^3}{12}$.

குறிப்பு 2 : செவ்வகத்தின் தேற்றப்படி செவ்வகத்தின் தளத்திற்குக் குத்தாக அதன் மையம் வழிச்செல்லும் கோட்டைச் சார்ந்த நிலைம சுழற்சி திறன் $= M \left(\frac{a^2 + b^2}{12} \right)$.

குறிப்பு 3 : (i) செய்வகத்தின் அகலப் பக்கத்தைச் சார்ந்த

$$\text{நிலைம அழல் திறன் } \frac{Ma^2}{3};$$

(ii) நீளப் பக்கத்தைச் சார்ந்த நிலைம அழல்

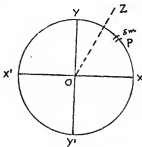
$$\text{திறன் } \frac{Mb^2}{3}$$

(iii) அதன் தளத்திற்குக் குத்தாக ஒருமுனை வழி அமைவும் கோட்டைச் சார்ந்த நிலைம அழல்

$$\text{திறன்} = M \left(\frac{a^2 + b^2}{3} \right)$$

குறிப்பு 4 : அகலம் = பக்கம் ஆனால், அதாவது $a = b$ என விட, சதுரத்தின் நிலைம அழல் திறன் வரும்.

ஒரு வட்டக் கம்பியின் நிலைம திருப்புதிறன் :



படம் 115.

XOX' ; YOY' என்பனவ ஒரு வட்டத்தின் மிகு குத்து விட்டங்கள்; OZ என்பது அவற்றிற்குக் குத்தாகவுள்ள கோடு. வட்டப் பரப்பியில் P எனும் மிடத்தில் r ம தனிவுள்ள துண்டாகுதி;

OZ -ஐச் சார்ந்த மிறன் நிலைம திருப்புதிறன் $r m a^2$ ஆகும். (α என்பது வட்டத்தின் ஆரம்)

$$\therefore \text{மூல வட்டத்தின் } OZ\text{-ஐச் சேர்ந்த நிலைம திருப்புதிறன்} \\ = \int \delta m r^2 = Mo^2$$

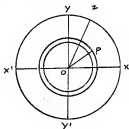
\therefore ஒரு வட்டக் கம்பெக்கு, அதன் மையம் வழி அதன் தளத் திக்குக் குத்தான கோட்டைச் சேர்ந்த நிலைம திருப்பு திறன் $= Mo^2$.

குறிப்பு: வட்டக் கம்பெக்கு $X'OX$, $Y'OY$ என்பவை மிகு குத்து விட்டங்கள். வட்டம் மீராண்டு விட்டங்களையும் சேர்த்து ஒன்று போன்று அமைவதால் $X'OX$ -ஐச் சேர்ந்த நிலைம திருப்புத்திறன் I என்றால் $Y'OY$ -ஐச் சேர்ந்த நிலைம திருப்புதிறனும் I ஆகும், ஆனால் குத்தாகத் தேற்றப்படு.

$$I + I = Mo^2 \quad (OZ \perp X'OX, Y'OY \text{ ஆனதால்})$$

$$\therefore I = \frac{Mo^2}{2}$$

வட்டத் தகட்டின் நிலைம திருப்புதிறன்:



படம் 116.

வட்டத் தகட்டின் மையம் O; $X'OX$, $Y'OY$ அதன் மிகு குத்து விட்டங்கள். OZ தளத்திக்குக் குத்தாகவுள்ள ஒரு கோடு; வட்டத் தகட்டின் ஆரம் a ; $OP = x$ எனின், x ஆரமுள்ள வட்டப் பரிதியின் OZ -ஐச் சேர்ந்த நிலைம திருப்புதிறனைக் காண்போம். p என்பது தகட்டின் அகல பரப்பின் செறிவாகும். x ஆரமுள்ள வட்டத்தைச் சுற்றி x அகலமுள்ள வட்ட வலயத்தின் பரப்பு $2\pi x \delta x$. ஆகவே, அதன் திணிவு $\rho 2\pi x \delta x$.

$$OZ\text{-ஐச் சார்ந்த அதன் நிலைம திருப்புத்திறன்} = \rho 2\pi x^2 \cdot x^2$$

$$\therefore OZ\text{-ஐச் சார்ந்த தகட்டின் நிலைம திருப்புத்திறன்} = \int_0^a 2\pi \rho x^3 dx$$

$$= \frac{\pi \rho a^4}{2}$$

$$\therefore \text{ஒரு தகட்டின் திணிவு} = \pi \rho a^2 = M$$

$$\therefore \text{நிலைம திருப்புத்திறன்} = \frac{Ma^2}{2}$$

குறிப்பு 1: வட்டத் தகட்டிற்கு அதன் விட்டம் $X'OX$ ஐச் சார்ந்த நிலைம திருப்புத்திறன் I என்றும், மற்ற விட்டங்களைச் சார்ந்த நிலைம திருப்புத்திறன்களும் I ஆகும்.

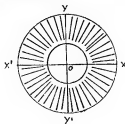
$\therefore Y'OY$ எனும் குத்தவிட்டத்தைச் சார்ந்த நிலைம திருப்புத்திறன் I

$$\therefore I + I = \frac{Ma^2}{2}$$

$$\therefore I = \frac{Ma^2}{4}$$

\therefore ஒரு வட்டத் தகட்டிற்கு அதன் விட்டத்தைச் சார்ந்த நிலைம திருப்புத்திறன் $\frac{Ma^2}{4}$ ஆகும்.

குறிப்பு 2: உள் கோடு b , வெளி கோடு a உள்ள வட்ட வலயத்தின் நிலைம திருப்புத்திறன்.



படம் 117.

$X'OX$ என்ற விட்டத்தைச் சார்ந்த நிலைம திருப்புகழைக் காண்
பொம்.

$$'b'$$
 ஆரமுள்ள வட்டத்தின் திணிவு $= \pi b^2 \rho$

$$\therefore X'OX\text{-ஐச் சார்ந்த } M.I. = (\pi b^2 \rho) \frac{b^2}{4} = \frac{\pi b^4 \rho}{4}$$

$$'a'$$
 ஆரமுள்ள உள்ள வட்ட வலயத்தின் $M.I. = \frac{\pi a^4 \rho}{4}$

கூடுதல்

$$\text{வட்ட வலயத்தின் } M.I. = \frac{\pi \rho}{4} (b^4 - a^4)$$

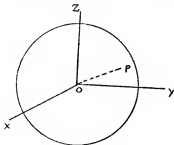
$$= \frac{\pi \rho}{4} (b^2 - a^2) (b^2 + a^2)$$

$$\text{வட்ட வலயத்தின் திணிவு } M = \frac{\pi \rho (b^2 - a^2)}{4}$$

$$\therefore \text{வட்ட வலயத்தின் விட்டத்தைச் சார்ந்த நிலைம திருப்புகழ்}$$

$$= \frac{M (a^2 + b^2)}{4}$$

ஒரு புறக் கோளத்தின் அதன் விட்டத்தைச் சார்ந்த நிலைம
திருப்புகழ்.



படம் 118.

புறக் கோளத்தின் (Hollow Sphere) மையம் O. OX, OY, OZ என்பனவு ஒன்றித்தொன்று குத்தான ஆரங்கள். மையத்தைச் சார்ந்த நிலைம திருப்புதிறன் I_x, I_y, I_z ஆகுக. கோளமானது எல்லா விட்டங்களையும் சார்ந்து ஒன்று போன்று அமைவதால் $I_x = I_y = I_z$. P என்பது புறப்பரப்பில் உள்ள திணிவு தூண்ட்புள்ளி SA-இல் உள்ள புள்ளி; இதன் திணிவு $\rho \delta A$ [ρ என்பது அடகு பரப்பின் செறிவு]. OX, OY, OZ என்பவற்றை அச்சுகளாகக் கொள்ள P-ன் கூறுகள் (x, y, z) ஆகுக.

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

$$x \text{ அச்சிலிருந்து P-ன் தூரம்} = \sqrt{y^2 + z^2}$$

$$\therefore I_x = \int (y^2 + z^2) \rho \delta A$$

$$\text{விதேயேன } I_y = \int (x^2 + z^2) \rho \delta A$$

$$I_z = \int (x^2 + y^2) \rho \delta A$$

$$\therefore I_x + I_y + I_z = 2 \int (x^2 + y^2 + z^2) \rho \delta A = 2a^2 \int \rho \delta A$$

$$\therefore 3I_x = 2\rho A a^2 \quad (A \text{ என்பது புறப்பரப்பு})$$

$$I_x = 2\rho A \frac{a^2}{3}$$

$$\text{ஆனால் புறக் கோளத்தின் திணிவு } M = \rho A$$

$$\therefore I_x = \frac{2Ma^2}{3}$$

$$\therefore \text{புறக் கோளத்தின் விட்டத்தைச் சார்ந்த அதன் நிலைம திருப்புதிறன்} = \frac{2Ma^2}{3}$$

திடக்கோளத்தின் நிலைம திருப்புதிறன் (M.I. of a solid sphere).

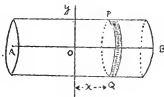
O என்பது திடக் கோளத்தின் மையமாகுக. அதன் ஆரம் a ஆகுக. அதில், r ஆரமுடைய புறக்கோள துண் பகுதியைக் கொள்வோம். அதன் கனம் δr ஆகுக. அப்போது அதன் திணிவு $4\pi r^2 \delta r \rho$ ஆகும். ஒரு விட்டத்தைச் சார்ந்த இதன் நிலைம திருப்புதிறன்

$$= 4\pi r^2 \delta r \rho \cdot \frac{2r^2}{3}$$

$$= \frac{8}{3} \pi \rho r^4 \delta r$$

திடக்கோளம், O யிலிருந்து a வரையுள்ள புறக்கோள துண்பகுதி களாய் ஆனது.

கணக்கு 1: ஓர் உருளையின் குறுக்கு வெட்டின் ஆரம் a , அதன் திசை l , என்றும் அதன் அச்சுக்குக் குத்தாகவும், திணிவு மையம் வழியும் செங்குத்தும் கோட்டைச் சாத்த திசை திருப்புத்திறைக் காணவும்.



படம் 119.

AOB உருளையின் அச்சு. O திணிவு மையம். AOB -க்குக் குத்தாக PQ எனும் குறுக்கு வெட்டைக் கொள்க. அதன் தூரம் O -யில் இருந்து x . ஆனாலும் அதன் தடிப்பம் x எனக் கொள்வோம். PQ எனும் விட்டத்தை ஓட்டி இதன் திசை திருப்புத்திறை

$$= \frac{a^2}{4} \delta m$$

OY எனும் கோடு AB -க்குக் குத்தாகுக. $OY \parallel PQ$ ஆனதால் OY எனும் கோட்டை ஓட்டிய PQ யின் $M.I.$

$$(\text{கிடை அச்சுக்களை தேற்றப்படி}) = \left(x^2 + \frac{a^2}{4}\right) \delta m$$

$$\text{ஆனாலும் } \delta m = \pi a^2 \delta x \rho \quad [\rho = \text{அடர்த்தி எனில்}]$$

$$\therefore \text{கொத்த } M.I. = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(x^2 + \frac{a^2}{4}\right) \pi a^2 \rho dx$$

$$= 2\pi a^2 \rho \int_0^{\frac{l}{2}} \left(x^2 + \frac{a^2}{4}\right) dx$$

$$= 2\pi a^2 \rho \left[\frac{l^3}{24} + \frac{a^2 l}{8} \right]$$

$$= \pi a^2 l \rho \left[\frac{l^2}{12} + \frac{a^2}{4} \right]$$

$$\text{ஆகவே } M = \pi a^2 l \rho$$

$$\therefore M.I. = M \left[\frac{l^2}{12} + \frac{a^2}{4} \right]$$

குறிப்பு :

$a = 0$ எனின், உருளை கோளாகும்.

$$\text{அப்போது } M.I. = \frac{M l^2}{12}$$

$l = 0$ எனின், உருளை தட்டாகும்.

அச்ச அதன் விட்டமாகும்.

$$M.I. = \frac{M a^2}{4},$$

கிடைசு உருளைபின் $M.I.$ கிவ்விரண்டின் கூடுதல் என்பதைக் காண்கிறோம்.

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. அரை வட்டத் தகட்டின், அதன் விட்டத்தைச் சார்ந்த நிலைமத் திருப்புதிறனைக் காண்கிடுக.

2. 'a' என்ற ஆரமுள்ள வால் வட்டக் கம்பியின், அதன் ஆரத்தைச் சார்ந்த நிலைமத் திருப்புதிறனைக் காணவும்.

3. a என்ற ஆரமுடைய செட்டு முகமும், l நீளமுமுள்ள உருளை யின், அதன் (i) அச்சைச் சார்ந்த (ii) செட்டு முகத்திற்கு மையத் தம் குத்தாகவுள்ள செட்டைச் சார்ந்த நிலைமத் திருப்புதிறன் காண்க.

4. 'a' ஆரமுடைய திடக் கோளத்திலிருந்து 'b' ஆரமுடைய பொது மையத் திடக்கோளம் தீக்கப்பட்டுள்ளது. வித்தகைய பந்தின் விட்டத்தைச் சார்ந்த நிலைமத் திருப்பு திறனைக் காணவும்.

$$\left(\text{விடை: } \frac{2M}{5} \frac{a^5 - b^5}{a^3 - b^3} \right)$$

5. ஒரு திடக்கூம்பின் உயரம் h ; அதன் அடிப்பாகத்தின் ஆரம் a ; அதன் எத்பு மையம் வழி அதன் அச்சுக்குக் குத்தாகவுள்ள ஒரு கோட்டைச் சாத்த திசைய திருப்புதிறன் $\frac{3M}{80} (h^2 + 4a^2)$ என துறுவுக.

கீழ்வரும் பொருள்களின், தரப்பட்டுள்ள அச்சுக்களின் சாத்த திசைய திருப்புத் திறன்களைக் கணக்கிடுக.

6. திண்ம அரைக்கோளம். அச்சு அதன் அடியின் அமையம் ஒரு விட்டம்.

7. ABC என்ற செங்கோண முக்கோணத் தகடு. $\angle B = 90^\circ$; அச்சு BC .

8. ஒரு கூம்பின் உயரம் h . அதன் முனைக்கோணம் 2α .

(i) கூம்பின் அச்சைச் சாத்த திசைய திருப்புதிறன்.

(ii) அச்சுக்குக் குத்தாக முனையின் அமையம் கோட்டைச் சாத்த $M.I.$.

(iii) கூம்பின் அடியின் உள்ள விட்டத்தைச் சாத்த $M.I.$.

9. ஒரு வட்டத் தகட்டின் ஒரு விட்டம் AB . B -க் மையத் திணியுள்ள துணிக்கை. கிம்மீரண்டிற்கும் A -க் அமையம் தொடு கோட்டை ஒட்டிய திசைய திருப்பு திறன்.

10. AB என்ற கோலின் துணி B -க் ஒரு திடப் பத்து பொருத்தப் பட்டுள்ளது. கோலின் திண்ம $4a$; பத்தின் விட்டம் a . கிர்ண்டும் ஒரே அடர்த்தியுள்ளவை எனினும் A -க், AB -க்குக் குத்தாக உள்ள அச்சைச் சாத்த திசைய திருப்புதிறன் காண்க.

**12. ஒரு நிலை அச்சைச் சுற்றிய
விறைபொருளியக்கம்**
(Motion of a rigid body about a fixed axis)

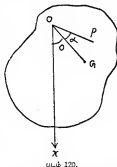
12-1. ஒரு நிலை அச்சைச் சுற்றும் ஒரு விறைபொருளின் இயங்கு ஆற்றல்.

ஒரு விறைபொருள் ஒரு நிலையான அச்சைப்பற்றிச் சுற்றுவதாகக் கொள்வோம். படத்தில் அச்சைக்குக் குத்தாக, விறைபொருளின் திணிவு மையமான G வழியே செல்லும் குறுக்குவெட்டுத் தளம் காட்டப் பட்டுள்ளது.

GO என்பது அச்சிற்குக் குத்தாக வித்தளத்தின் வரையப் பட்ட கோடு.

OX என்பது ஒரு குறிப் பிட்ட திசையாகும்.

† நோத்தில் $\angle XOG = \theta$ என்போம்.



படம் 120.

P என்பது விறைபொருளின் ஏதேனும் ஒரு துணிக்கை. $\angle GOP = \alpha$ என்றும், $OP = x$ என்றும் கொள்வோம். விறைபொருளில் OP -ன் தூரமும், $\angle GOP$ -ம் இயக்கத்தின்போது மாறுபடும்.

∴ P , O வைச் சுற்றிய வட்டப்பாதையில் இயங்கும்.

$$\therefore P\text{-ன் வேகம் } v = x \frac{d}{dt} (\theta + \alpha)$$

ஆனால் $\angle GOP = \alpha$ -வும் விபக்கத்தில் மாறுதல்.

$$\therefore \frac{d\alpha}{dt} = 0$$

$$\theta = \pi \frac{d\theta}{dt} = \pi \dot{\theta}$$

P-ன் திணிவு m (கூண்டுகூறு) எனில்,

P-ன் விபங்கு ஆற்றல் $= \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$

விதர்ப்பாவு விநைபொருளின் ஒவ்வொரு துணிக்கைக்கும்

விபங்கு ஆற்றல் $= \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$

(ஏனெனில் எம்மையற்றிற்கும் $\dot{\theta}$ ஒன்றாகவே இருக்கும்)

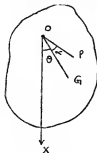
$$\therefore \text{மொத்த விபங்கு ஆற்றல்} = \frac{\dot{\theta}^2}{2} \int x^2 dm$$

$$= \frac{I \dot{\theta}^2}{2} \quad [I \text{ என்பது விநைபொருளின் அச்சைப்பற்றிய நிலைம திருப்புத்திறன் M.I.}]$$

$I = Mk^2$ என்றால் [விநைபொருளின் திணிவு M],

$$\text{விபங்கு ஆற்றல்} = \frac{1}{2} Mk^2 \dot{\theta}^2$$

12.2. பயன்படு விசைகளின் அச்சைச் சுற்றிய கழல் திறன் (Expression for Moment of effective forces about axis of rotation)



படம் 121.

விநைபொருளின் திணிவு மையம் G என்க.

OX ஒரு குறிப்பிட்ட திசை.

't' நேரத்தில் $\angle XOG = \theta$.

P என்பது விநைபொருளின் ஏதேனும் ஒரு துணிக்கை.

$$\angle GOP = \alpha$$

$$OP = r$$

விநைபொருளாதலாக OP-ன் தூரம் மாறுதல்.

\therefore P, O-வை அடியமாகவுடைய வட்டப் பாதையில் நியங்கும்.

$$\therefore P\text{-ன் முறுக்கம்} = x \frac{d^2}{dt^2} (\theta + \alpha) \quad [OP\text{-க்குக் குத்தாக } \theta \text{ அதி கதிக்கும் திசையில்}]$$

P -ன் திணிவு m ஆகுக.

$\therefore P$ -ன் செயல்படு விசையின் அளவு

$$= m \cdot x \frac{d^2}{dt^2} (\theta + \alpha)$$

$$= m \cdot x \frac{d^2 \theta}{dt^2} = m \ddot{\theta}$$

$$\left(\alpha \text{ மாறுவதில்லையாதலால் } \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = 0 \right)$$

கிம்விசையின் அச்சைப்பற்றிய சுழல் திறன் $= m x \ddot{\theta}$

கிநேபோல மத்தத் துணிக்கைகளுக்கும்,

ஆகவே பயன்படு விசைகளின் சுழல் திறன் $= \int m x \ddot{\theta}$

θ எல்லாவற்றிற்கும் ஒன்றே ஆதலால்

$$\text{சுழல் திறன்} = \ddot{\theta} \int x^2 m$$

$$= I \ddot{\theta} = M k^2 \ddot{\theta}$$

\therefore விநைபொருளின்மேல் செயல்படும்

பயன்படு விசைகளின் அச்சைச் சுற்றிய சுழல் திறன் $= M k^2 \ddot{\theta}$

[இங்கு M என்பது விநைபொருளின் மொத்தத் திணிவு; ' k ' அச்சைச் சார்ந்த சுழலாக்கம்].

12.3. அச்சைச் சுற்றிய விநைபொருளின் உத்தச் சுழல்திறன்.

மேற்கூறியபடி துணிக்கையின் வேகம் $= x \dot{\theta}$ (OP -க்குக் குத்தாக)

அதன் உத்தம் $= x \dot{\theta} \sin$

கிதன் அச்சைச் சார்ந்த சுழல்திறன் $= x \dot{\theta}^2 \sin$

ஆனால் θ எல்லாத் துணிக்கைகளுக்கும் ஒன்றே

$$\therefore \text{மொத்த உத்தச் சுழல்திறன்} = \dot{\theta}^2 \int x^2 m$$

$$= I \dot{\theta}^2$$

$$= M k^2 \dot{\theta}^2$$

குறிப்பு: மேலே கூறிய மூன்று சூத்திரங்களும் ஒரு விநை பொருளில், ஒர் அச்ச நிலையாக இருந்து நியங்கும்போது அதன் மிகச்சத்தை ஆராயப் பயன்படும்.

12.4. கூட்டு ஊசலி (Compound pendulum)

ஒரு விநாடிகை ஒரு கிடை அச்சைச் சுற்றிச் சிற்றொருநிலைத் திசையிலும் அது கூட்டு ஊசலி எனப்படும்.



படம் 12.2.

கூட்டு ஊசலின் இயக்கம்

விநாடிகையின் திசையு மையம் G ஆகும்.

CO அச்சுக்குக் குத்து.

OX என்பது கீழேநோக்கியுள்ள திசைக்கோடு.

'θ' கோணத்தில் $\angle XOG = \theta$; $OG = h$.

விநாடிகையின்மேல் செயல்படும் வெளியின்கைகள்

G-யில் கீழேநோக்கி mg ;

அச்சில் (O-யில்) அளவு, திசைநெரியாத எதிர்வினைகள் மிகவும் வாகும். இவ்வெதிர் வினைகளின் அச்சைச் சுற்றிச் சுழல்திறன் பூச்சியமாகும்.

$$\begin{aligned} \text{சுழல் திறன் சுழல்திறன்} &= -mg \cdot OG \sin \theta \\ &= -mgh \sin \theta \end{aligned}$$

[சுழல்திறன் θ குறைபுறம் திசையிலிருப்பதால் எதிர்மறையாகும்.]

$$\begin{aligned}\text{ஆனால் பயன்படு விசையின் சுழற்சிநிறை} &= mk^2\ddot{\theta} \\ \therefore mk^2\ddot{\theta} &= -mgh \sin \theta \\ \ddot{\theta} &= \frac{-gh}{k^2} \sin \theta\end{aligned}$$

θ அளவில் சிதியதாகையால், θ -வை ரேடியளவில் கூற,

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \theta \\ \therefore \ddot{\theta} &= \frac{-gh}{k^2} \theta\end{aligned}$$

$$\text{மிகு } \frac{d^2\theta}{dt^2} = -p^2\theta \text{ எனும் வடிவில் உள்ளதால்}$$

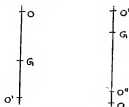
கூட்டு ஊசலியின் இயக்கம் $2\pi \sqrt{\frac{k^2}{gh}}$ எனும் அலைவு காலமுள்ள தனி விசை இயக்கமாகும்.

குறிப்பு 1: இதே காலமுள்ள தனிபூசலின் நீளம் $l = \frac{k^2}{h}$ கிவ்வாறு கூட்டு ஊசலின் காலமுள்ள தனிபூசலியைச் சமனாவதே தனி பூசலி (Simple Equivalent Pendulum) என்கிறோம்.

குறிப்பு 2: O என்றும் புள்ளி கூட்டு ஊசலியின் தொங்கல் மையம் (Centre of suspension) ஆகும்.

குறிப்பு 3: OG எனும் கோட்டில் $OG' = \frac{k^2}{h}$ எனும்படி O' எனும் புள்ளியைக் கொடுக்க. O' எனும் புள்ளி அலைவு மையம் (Centre of oscillation) என அழைக்கப் பெறும்.

12-4-1. தேற்றம்: ஒரு கூட்டு ஊசலியின் அலைவு மையத்தைத் தொங்கல் மையமாகக் கொண்டால் தொங்கல் மையம் அலைவு மையமாக மாறும்.



படம் 123.

$$\text{திருபணம்: } OO' = \frac{k^2}{h}$$

பொருளின் திணிவு மையம் வழி உள்ள நிலையான கோட்டைச் சார்ந்த சுழலாற் K ஆகுக.

$$\text{அப்போது } k^2 = K^2 + h^2$$

$$\therefore OO' = \frac{K^2 + h^2}{h} = \frac{K^2}{h} + h$$

$$OG + GO' = \frac{K^2}{h} + h$$

$$\text{ஆனால் } OG = h$$

$$GO' = \frac{K^2}{h} = \frac{K^2}{OG}$$

$$\therefore OG \cdot O'G = K^2$$

O' தொங்கக் கையமாகும் O'' அலைவு கையமாகுக.

$$O'G \cdot O''G = K^2$$

$$\therefore OG = O''G$$

O'' எனும் புள்ளி O -ல் அமைகிறது.

அதாவது O' தொங்கக் கையமாகும் O அலைவு கையமாகிறது.

12-4-2. கூட்டு ஊசலியின் மிகச் சிறு அலைவு காலம்

தொங்கக் கையம் மாத் மாத அலைவு காலமும் மாதும்.

$$\text{அலைவு காலம்} = 2\pi \sqrt{\frac{k^2}{gh}}$$

$\therefore \frac{k^2}{h}$ மிகச் சிறிய மதிப்பாகும் அலைவு காலமும் மிகச் சிறிய மதிப்பாகும்.

K என்பது திணிவு மையம் வழி சுழலக்கூறு நிலையான அச்சச் சார்ந்த சுழலாற் ஆகுக.

$$\therefore k^2 = K^2 + h^2$$

$$\therefore \frac{k^2}{h} = \frac{K^2}{h} + h$$

$$\text{ஆனால் } \frac{K^2}{h} \times h = K^2 \text{ (மாறா எண்)}$$

$$\text{ஆகவே } \frac{k^2}{h} \text{-ன் மிகச் சிறிய மதிப்பு}$$

அதாவது $\frac{K^2}{h} + h$ -ன் மிகச் சிறிய மதிப்பு

$$\frac{K^2}{h} = h \text{ எனும்போது ஆகும்.}$$

(மிகச்சிறியம்—சமனின்மைத் தேற்றம்)

$$\therefore h = K$$

$$\text{அப்போது } \frac{k^2}{h} = 2K$$

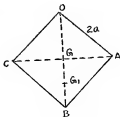
கூட்டு ஊசலிக் கணக்குகள்

கணக்கு : ஒரு சதுரத் தகட்டின் பக்க நீளம் $2a$. அதன் ஒரு மூலையில், சமத் திணிவுள்ள ஒரு துணிக்கை பொருத்தப்பட்டுள்ளது. எதிர்மூலையிலிருந்து அதைத் தொங்கவிட்டால் வரும் கூட்டு ஊசலியின் ஊசல்திறற்குச் சம காலமுள்ள தனி ஊசலியின் நீளமென்ன?

தனி ஊசலி ஊசல்க் குத்திரம்

$$I = \frac{k^2}{h}.$$

மிகு k என்பது தகடு. துணிக்கை சேர்த்த தொகுதியின் O -வைச் சுற்றிப் சுழலாது. ' h ' என்பது பொதுத்திணிவு மையத்தின் O -யிலிருந்துள்ள தூரம்



படம் 124.

$OABC$ சதுரமானால்,

$$OG = \sqrt{2} a \quad CB = \sqrt{2} a$$

பொதுத் திணிவு மையம் GB -யின் நடுப்புள்ளி G .

$$\therefore 'h' = \sqrt{2}a + \frac{\sqrt{2}a}{2}$$

$$h = \frac{3}{2}\sqrt{2}a = \frac{3a}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{O-மையத் சுற்றிய சூரத்தின் } M.I. &= m \left(\frac{4a^2}{3} + \frac{4a^2}{3} \right) \\ &= \frac{m \cdot 8a^2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{துணிச்சையின் } M.I. &= m \cdot (2\sqrt{2}a)^2 \\ &= m \cdot 8a^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{மொத்த } M.I. = \frac{m \cdot 32}{3} a^2$$

$$\text{மொத்தத் திணிவு} = 2m$$

$$\therefore k^2 = \frac{16}{3} a^2$$

$$\therefore I = \frac{16a^2}{3} + \frac{8a}{\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{3} a$$

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. 3 அடி விட்டமுள்ள திடக்கோளம் 5 அடி நீளமுள்ள தூவாகத் தொங்கவிடப்பட்டு ஊசலாகுகிறது. இந்தக் குச் சமமான தளியூசலியின் நீளம் யாது? [(விடை உ 5.25 ft) = 3237]

2. ஒரு வட்டத் தாட்டில் மையத்தினின்றும் h தூரத்திற் ஓர் அச்சு, தாட்டின் தளத்திற்குக் குத்தாக உள்ளது. இந்த அச்சு கிடைவாக இருக்கும்பொழுது, தைடு உராய்வின்றி அச்சைச் சுற்றி ஊசலாகுகிறது. இதன் அலைவு காலத்தைக் கணக்கிடுக.

$$\left(\pi \sqrt{\frac{2a^2 + 4h^2}{9h}} \right)$$

3. ஒரு திடமான கோளின் நீளம் a ; திணிவு m . கோல் அதன் ஒரு துளியில் உள்ள கிடை அச்சிலிருந்து தொங்குகிறது. மற்றொரு துளியில் சமத் திணிவுள்ள துணிச்சை பொருத்தப்பட்டுள்ளது. இந்தக் கோளின் அலைவு காலம் என்ன? அலைவு காலம் வினாடியாக இருக்க அதன் நீளம் என்ன?

$$\left(4\pi \sqrt{\frac{2l}{9g}}; 9/v^2 \text{ ft} \right)$$

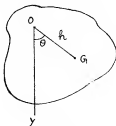
4. ஒரு கோலின் தீளம் $2a$; அது மிகச் சிறிய சாலத்துடன் ஊசலாட ஒரு கிடை அச்சு எங்கு இருக்கவேண்டும்?

$$\left(\text{நடுப்புள்ளியிலிருந்து } \frac{a}{\sqrt{3}} \text{ தூரத்தில்.} \right)$$

5. ஒரு வட்டத்திற்கு, அதன் தளத்திலேயே அமைவும் அச்சை சுற்றி ஊசலாடுகிறது. அலைவு காலம் மிகவும் குறுகியதாக இருக்க அச்சு எங்கே இருக்கவேண்டும்?

6. ஒரே சீரான திடக் கூம்பு வடிவத்தின் உயரம் h ; முனைக் கோணம் 2α , முனைவழி உகிள கிடை அச்சிலிருந்து தொங்கி ஊசலாடுகிறது. இதற்குச் சமமான தனிப்பூசலின் தீளம் $\frac{h}{5} (4 + \tan^2 \alpha)$ என திறவுக. (M. U. April 61)

12-6. கிடை அச்சை சுற்றிய இயக்கம்



படம் 125.

விநைபொருளின் திணிவு மையம் G. O தொங்கல் மையம். OX கிற்றோக்கியுள்ள திசைக்கோடு.

‘θ’ நேரத்தில் $\angle XOG = \theta$.

G, O-வுக்கு நேர் கிழாக இருக்கும்போது ‘ம’ எனும் கோண வேகத்துடன் சுழல்கிறது எனக் கொள்வோம்.

ஆற்றல் காப்பு விதிப்படி,

t நேரத்தில் மொத்த ஆற்றல் = தொடக்க நேரத்தில் உள்ள ஆற்றல்

$$\therefore \frac{1}{2} m k^2 \dot{\theta}^2 - mgh \cos \theta = \frac{1}{2} m k^2 \omega^2 - mgh$$

$$[K.E + P.E \text{ at } t] = [K.E + P.E \text{ at } t = 0]$$

விதர்பொருள் சரிவாக ஒரு சுற்று வர

$$\theta = \pi \text{ எனும்போது } \dot{\theta} = 0 \text{ ஆகவேண்டும்.}$$

$$\therefore mgh = \frac{1}{2} m k^2 \omega^2 - mgh$$

$$\therefore \omega^2 = \frac{4gh}{k^2}$$

$$\therefore \frac{2}{k} \sqrt{gh} \text{ எனும் கோணவேகத்துடன் கீழிருந்து புறப்பட்டால்,}$$

சரியாக ஒரு சுற்று வரமுடியும்.

$$\omega < \frac{2}{k} \sqrt{gh} \text{ என்றால் முழுச்சுற்று வரமுடியாது.}$$

கணக்கு 1. 'I' நீளமுள்ள ஒரு நேரான கம்பு அதன் ஒரு துனியிலிருந்து தொடக்கவிடப்பட்டிருக்கிறது. அது என்ன வேகத்துடன் கழல் ஆரம்பித்தால் முழுச்சுற்று வரமுடியும்?

$$\text{கிடைசு } k^2 = \frac{l^2}{3} \quad h = \frac{l}{2} \quad \therefore \frac{k^2}{h} = \frac{2}{3} l$$

$$\therefore \omega^2 > \frac{4g \cdot 3}{2l} \quad \therefore \omega^2 > \frac{6g}{l} \quad \therefore \text{குறைந்தது}$$

$\sqrt{\frac{6g}{l}}$ கோணவேகத்துடன் சுழலத் தொடங்கினால் முழுச் சுற்று வரமுடியும்.

கணக்கு 2. ஒர் அச்சரசு சுற்றிச் சுழலும் சக்கரத்தைச் சுற்றி 10 அடி நீளமுள்ள சயிற் சுற்றப்பட்டுள்ளது. தாளை ஒரே சீரான 50 படி. என வளைவாகக் கிழித்து துறை முற்றிலும் எடுத்ததும் நிமிடத்திற்கு 100 சுற்றுவேகத்துடன் சக்கரம் சுழலுகிறது. அதன் நிலைமத் திருப்புத்திறன் $\frac{90g}{\pi^2}$ எனக் காட்டுக. (M.U.)

சக்கரத்தின் கியஸ்கு ஆற்றல் = செய்யப்பட்ட வேலை

$$\text{கியஸ்கு ஆற்றல் குத்திரப்படி} = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

$$\dot{\theta} = \frac{200\pi}{60}$$

$$\text{செய்யப்பட்ட வேலை} = \text{விசை} \times \text{தூரம்}$$

$$= 50g \times 10$$

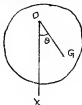
$$= 500g$$

$$\therefore \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = 500g$$

$$I = \frac{1000g}{\dot{\theta}^2} = \frac{1000g \times 60 \times 60}{200 \times 200 \times \pi^2}$$

$$= \frac{90g}{\pi^2} \text{ அல்லது}$$

கணக்கு 3. ஒரு வட்டத்தாகத் திடமொடுங்கப்பட்டிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. தாண்டின் திணிவு 3 பவு. ஆரம் 1 அடி. அதன் ஸ்வயத்திய் தகட்டிற்குக் குத்தாக 15 பவு./அடி தாக்களவு உட்கள படி கொடுக்கப்படுகிறது. அது எவ்வளவு மேலே கோணம் சுற்றிக் கீழே நிறங்கும் என்பதைக் கணக்கிடுக.



படம் 126.

ஏதேனும் ஒரு பொருளுக்கு G திணிவு மையம் ஆகுக.

O தொங்கல் மையம் $= OG = h$. திணிவு m .

OX நேர்கீழாகவுள்ள திசைக்கோடு

' θ ' கோணத்திற்கு $XOG = \theta$

ஆற்றல் காப்புக் கொள்கைப்படி

' θ ' கோணத்திற்கு நிலங்கு ஆற்றல் + நிலை-ஆற்றல்

$=$ புறப்படு நிலங்கு ஆற்றல் + நிலை ஆற்றல்

$$\therefore \frac{1}{2} m k^2 \dot{\theta}^2 - mgh \cos \theta$$

$$= \frac{1}{2} m k^2 \omega^2 - mgh$$

$$\theta = \alpha \text{ எனும்போது}$$

$$\dot{\theta} = 0 \text{ என்றால் } 2gh(1 - \cos \alpha) = k^2 \omega^2$$

$$\text{மிக்கு } 'k^2' = \frac{a^2}{4} + a^2 = \frac{5a^2}{4} = \frac{5}{4} \quad (a=1 \text{ ஆனதால்})$$

$$h = a = 1 \quad g = 32$$

ம-மவக் கணக்கிட.

உத்த மாறுதலின் கழக்திறம் = கணத்தாக்கு விசையின் கழக்திறம்

$$\therefore mk^2\omega = 15a$$

$$\frac{3 \cdot 5}{4} \omega = 15a$$

$$\therefore \omega = 4a = 4$$

$$\text{பிரதிவி. } 2 \times 32 \times 1 (1 - \cos \alpha) = \frac{5}{4} \cdot 16$$

$$\therefore 1 - \cos \alpha = \frac{5}{16}$$

$$\cos \alpha = \frac{11}{16} = .6875$$

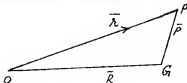
$$\therefore \alpha = 46^\circ 34'$$

\therefore தகடு $46^\circ 34'$ கோணம் மேலாகச் சுற்றி நிறங்கிறது.

12.6. விசைபொருளின் சமதள இயக்கம்

ஒரு விசை பொருளின் துணிக்கைகள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு சமதளத் திசை மீளையாகவுள்ள சமதளங்களில் தொடர்ந்து இயங்கினால், அது சமதள இயக்கமெனப்படும். உதாரணமாக ஒரு பந்து ஒரு விட்டத்தை அச்சாகக்கொண்டு கழல்கிறது. அச்சின் திசை மாறுது இருந்தால், ஒவ்வொரு துணிக்கையும் அச்சுக்குக் குத்தாகவுள்ள மீளாத சமதளங்களில் இயங்கும். மித்தகைய இயக்கம் சமதள இயக்கமொளும்.

ஒரு விசைபொருளின் இயங்கு ஆற்றல்



O எனும் புள்ளியை மூலப் புள்ளியாகக் கொள்வோம். g என்பது திணிவு மையம் $\vec{OG} = \vec{R}$. P என்பது விநைபொருளின் ஒரு துணிக்கை. $\vec{OP} = \vec{r}$; $\vec{GP} = \vec{\rho}$

$$\therefore \vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho}$$

துணிக்கையின் திணிவு $= m$. அதன் வேகம் $= \dot{\vec{r}}$

$$\begin{aligned} \therefore \text{துணிக்கையின் இயங்கு ஆற்றல்} &= \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \\ &= \frac{1}{2} m [\dot{R}^2 + \dot{\rho}^2 + 2\dot{R} \cdot \dot{\rho}] \end{aligned}$$

\therefore விநைபொருளின் இயங்கு ஆற்றல் $= T$ என்றால்

$$2T = \sum m \dot{R}^2 + \sum m \dot{\rho}^2 + \sum m 2\dot{R} \cdot \dot{\rho}$$

ஆனால் எல்லாத் துணிக்கைகளுக்கும் \dot{R} பொது.

அன்றிலும் மொத்தத் திணிவு $M = \sum m$; திணிவு மையம்

$$\text{வினக்கத்தின்படி } \sum m \dot{\rho} = 0$$

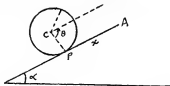
$$\therefore 2T = M \dot{R}^2 + \sum m \dot{\rho}^2$$

ஆகவே கீழ்வரும் தேற்றம் வருகிறது. விநைபொருளின் இயங்கு ஆற்றல் $=$ விநைபொருளின் திணிவுக்குச் சமமான துகள் ஒன்று அதன் திணிவு மையத்தின், திணிவு மையத்திலிருந்து இயங்கினால் உண்டாகும் ஆற்றலும், திணிவு மையம் நிலை எவக்டொண்டு அதை விநைபொருள் சுற்றுவதால் ஏற்படும் ஆற்றலும் கூடியதாகும். இவ்வாறு இயங்கும் விநைபொருளின் இயங்கு ஆற்றலைக் காணவேண்டும். இடப் பெயர்ச்சியால் ஏற்படும் ஆற்றலும், சுழலுவதால் ஏற்படும் ஆற்றலும் என இருவகை இயங்கு ஆற்றலின் கூடுதலாகும்.

விநைபொருளின் நிலை ஆற்றல் (Potential Energy): விநை பொருளின் துணிக்கைகள் யாவும் திணிவு மையத்திலிருந்து நிலையான தூரத்தில் இருப்பதால், சமத்திணிவுள்ள ஒரு துகள் திணிவு மையத்தின் இருத்தால் என்ன நிலைஆற்றல் உண்டோ அதுவே விநைபொருளின் நிலைஆற்றல் ஆகும்.

விநைபொருளின் பொது இயக்கம்: ஆற்றல் காப்பு விசைகள் செயல்படும்கொது இயக்கச் சமன்பாட்டை ஆற்றல் காப்பு விதியிலிருந்து எழுதலாம். t_1 நேரத்தில் மொத்த ஆற்றல் $= t_2$ நேரத்தில் மொத்த ஆற்றல் என்பது அச் சமன்பாடு.

கனகசூரி : உ* சாய்வுள்ள ஒரு சாய்வளத்தின் மேலிருந்து ஒரு திடப்பந்து உருவிடப்படும். அதன் முடுக்கம் என்ன ?



படம் 123.

't' நேரத்தில் பந்தின் மையம் சென்ற தூரம் x ஆகும். CQ எனும் ஆரம் தனக் குத்துடன் θ° கோணச்சாய்வில் உள்ளது. P எனும் புள்ளி பந்து தளத்தைத் தொடும் மீடம். A என்ற மீடத்தில் t=0 எனும்போது P இருந்தது.

∴ AP = x; முற்றிலும் உருகிவதால்

மீடம் aθ = x

∴ aθ = x ∴ aθ̇ = ẋ. aθ̈ = ẍ

't' நேரத்தில் பந்தின் மையம் ஆற்றல் = $\frac{1}{2}mẋ^2 + \frac{1}{2}mk^2θ̇^2$

(மிகுபடி பந்து மையம் வழி விடை அச்சைச் சுற்றிச் சுழல்கிறது.)

't' நேரத்தில் அதன் நிலை ஆற்றல் = -mgx sin α

t = 0 எனும்போது மொத்த ஆற்றல் = 0

∴ $\frac{1}{2}mẋ^2 + \frac{1}{2}mk^2θ̇^2 - mgx \sin \alpha = 0$

∴ $ẍx + k^2θ̈θ̇ - gx \sin \alpha = 0$

$ẍ + \frac{k^2ẍ}{a^2} - g \sin \alpha = 0$

∴ $ẍ \left(1 + \frac{k^2}{a^2}\right) = g \sin \alpha$

∴ $x = \frac{g \sin \alpha}{\left(1 + \frac{k^2}{a^2}\right)}$

$$(i) \text{ திட்ட பந்தாணம் } k^2 = \frac{2a^2}{5} \quad \therefore \quad \ddot{x} = \frac{5}{7}g \sin \alpha.$$

$$(ii) \text{ புறப் பந்தாணம் } k^2 = \frac{2a^2}{3} \quad \therefore \quad \ddot{x} = \frac{3}{5}g \sin \alpha.$$

$$(iii) \text{ திட்ட உருவாணம் } k^2 = \frac{a^2}{2} \quad \ddot{x} = \frac{2}{3}g \sin \alpha.$$

$$(iv) \text{ புற உருவாணம் } k^2 = a^2 \quad \ddot{x} = \frac{g \sin \alpha}{2}.$$

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் சென்னை.

1971 ஏப்ரல் வரை வெளியிட்டுள்ள நூல்கள்

பொருளாதாரம்

*1. பொருளாதாரம்—I	...	சி. வேலாயுதம்	ரூ. பை.
*1-A "	...	"	6 50
*2. சோவியத் பொருளாதார வளர்ச்சி	...	"	9 00
*3. அமெரிக்கப் பொருளாதாரம்	...	டாக்டர் எம். ஜே. கே. தவராஜ்	4 25
*4. பொருளாதாரத் திட்டனை வரலாறு	...	"	4 50
*5. பன்னாட்டு வானியல்	...	சொன்னுசுவம்	7 00
*6. புதுமைப் பொருளாதாரக் கூறுகள்	...	மு. அருளாச்சிபாராமி	6 00
*7. பொருளாதாரம் ஓர் அறிமுகம்—I	...	திருமதி. ஐ. சி. தாமரஜனாட்சி	12 00
*8. "	...	தி. சி. ரெகன்	12 00
*9. பொருளாதாரக் கோட்பாடு வளர்ந்த வரலாறு	...	எம். ஏ. அப்பர்வசாரி, பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	10 75
*10. பன்னியதில் பாக்டிரியம்—I	...	க. முத்தையன்	7 00
*11. "	...	சி. கோவாயுதம்	6 75
*12. நவீன பாக்கு கிப்பர்	...	"	11 50
*13. திட்டிபத் செலாவணியில் பாக்கு முறைபடி	...	க. வெத்திவேல்	5 00
*14. அரக்கை திதி கிப்பர்	...	பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	5 50
*15. திட்டிபப் பொருளியம்—I	...	அர். செஷாசுவம்	4 75
*16. "	...	எம். பாலகந்திரமணிபன்	10 00
*17. தமது பொருளாதாரம் பிரச்சினை—I	...	எம். ஸ்ரீநிவாசன்	4 25
* மூலநூல் (Original Book)	...	சி. சுந்தரராஜன்	10 75

* மூலநூல் (Original book)

பொருளாதாரம்—(தொடர்க்கி)

				ரூ. எப்.
18.	தமிழ் பொருளாதாரப் பிரச்சினை—II	...	எஸ். குழந்தைசாமிநாயக்கர்	... 10 50
19.	கிங்கோந்திம் பொருளாதார வரலாறு—I	...	கி. சி. கிராமசாமி	... 6 00
20. 6 00
21.	அமெரிக்காவின் கரீபியன் பொருளாதார வளத்தினை	...	தி. சி. ரெகன்	... 5 00
22.	அமெரிக்கப் பொருளாதார வரலாறு—I	...	மு. க. கப்பிரமணிபக்	... 11 00
23.	பி. வி. சிதம்பரன்	... 6 00
24. 6 50
25.	கிராமப் பகுதியிலிருந்து பொருளாதாரம்—I	...	மா. குமாரசாமி	... 10 00
26.	அ. சேஷசாயம்	... 9 50
27.	இந்தியாவின் பொருளாதார வளத்தினை—I	...	தே. வெம்பை	... 10 00
28.	ஜி. சிதம்பரன்	... 8 00
29.	பண்டம்—பிற்பகுதி	...	சே. கிராமசாமி	... 10 00
30.	வணிக நிலையங்கள்	...	சே. கிராமசாமி	... 9 50
31.	பத்திரிகைகள், தொழில்-வணிகப் பத்திரிகைகள்	...	சே. கிராமசாமி	... 10 00
32.	பெண்ணெய் பொருளாதாரம்—I	...	சே. கிராமசாமி	... 9 50
33.	சே. கிராமசாமி	... 11 00
34.	வரவு செலவுத் திட்டம்	...	சே. கிராமசாமி	... 11 00
35.	பன்னாட்டுப் பொருளாதாரம்—I	...	சே. கிராமசாமி	... 7 50
36.	சே. கிராமசாமி	... 6 00
37.	பொருளாதார ஆய்வுகள்—I	...	சே. கிராமசாமி	... 7 50
38.	சே. கிராமசாமி	... 9 00
39.	வணிக சிவனாசிரமம்	...	சே. கிராமசாமி	... 7 00
40.	வணிக சிவனாசிரமம்	...	சே. கிராமசாமி	... 7 75
41.	1939 முதல் 1940-ம் ஆண்டு வரையிலான பொருளாதார வளத்தினை	...	சே. கிராமசாமி	... 4 25
42.	பொருளாதார வளத்தினை	...	சே. கிராமசாமி	... 5 50
		...	சே. கிராமசாமி	... 7 50
		...	சே. கிராமசாமி	... 7 75

43. கித்தியம் பொருளாதார வரலாறு (1857—1956).—I	...	ம. திருநாவுக்கரசு	...	7 00
44. பொருளாதாரம்—ஒர் ஆதிமுகம்	...	பு. வி. சீனிவாசன்	...	6 25
வரலாறு				
*45. பிரிட்டன் வரலாறு—I	...	கி. ச. அனாந்தன்	...	4 50
*46. " II	...	"	...	3 50
*47. " III	...	"	...	7 25
*48. பிரெஞ்சு வரலாறு—I	...	சு. வி. ரொக்கெய்	...	4 50
49. பிரெஞ்சு—கடந்த இருதிரைகளினாலாக *50. கித்தியம்	...	வை. விருத்திரேசன்	...	15 00
51. " II	...	கிரா. அண்ணாமலை	...	13 00
52. " III	...	பா. மாலிக் கோபால்	...	13 00
53. " IV	...	என். ரெ. ராஜகோபால்	...	8 00
54. கித்தியத்தின் வரலாறு—I	...	"	...	8 00
55. " II	...	க. த. திருநாவுக்கரசு	...	15 00
56. " III	...	எம். எக்ஸ். பிரண்டர்	...	3 00
57. கித்தியத்தின் சிமிய வரலாறு—I	...	"	...	5 00
58. " II	...	தி. வெ. குப்பசாமி	...	7 50
59. " III	...	ஏ. உலாஸ் ஷெரீப்	...	9 00
60. கிரேக்க நாட்டு வரலாறு—I	...	அ. பாண்டிரங்கன்	...	11 00
61. " II	...	சைமன் டி. எஸ். பாக்கியநாதன்	...	7 50
62. " III	...	"	...	7 00
63. ஆக்ஸ்போர்டின் கித்திய வரலாறு—I	...	பி. திராமரதுங்கு நெதரன்	...	7 75
64. " II	...	தி. வெ. குப்பசாமி	...	8 25
65. " III	...	ஏ. உலாஸ் ஷெரீப்	...	7 50
66. முகாமல் பேராக—I	...	க. த. திருநாவுக்கரசு	...	10 50
	...	ஏ. உலாஸ் ஷெரீப், எம். எக்ஸ். பிரண்டர்	...	7 50

• மூலக் (Original Book)

*92. மக்கள்-இயிசி	4	25
93. 1919 முதல் செவ்வெத உதவுகலும் உலக அபிவிருத்தி-I
94. சமூக அபிவிருத்தி கோவிலைகள் அபிவிருத்திகள்	7 75
95. அபிவிருத்தியைப்பற்றி எட்டி-ஆய்வுகள் ஒரே அறிவுமையி-I	7 00
96. " "	5 75
97. " "	6 00
...	5 75
உளவியல்						
98. குழந்தை உளவியல்-I	8 00
99. " "	7 00
100. உட்கவல் மனம்	7 00
101. தீவிரமாய் உளவியல்-I	12 00
102. " "	9 00
103. சமூக உளவியல்	9 25
104. குழந்தை உளவியல்	11 00
105. பித்திரி உளவியல்	3 00
*106. குழந்தை உளவியல்	6 25
*107. உளவியல்	6 00
தத்துவம்						
108. தத்துவம்	5 50
*109. அறிவு அறிவுத்தல் தத்துவம்	3 50
*110. மனம் தத்துவம்	3 50
111. அறிவுத்தல் தத்துவம்	6 50
112. அறிவுத்தல் தத்துவம்	5 50
113. தத்துவம்	3 50

* மூலநூல் (Original Book)

தக்ஷணம் (தொடர்ச்சி)

114. கித்தியத் தத்துவம் II

115. மெய்ப்பொருளியல்-ஓர் அறிமுகம்—I

அறிமுகம்

116. அறிமுகம்-ஓர் அறிமுகம்

விளக்கம்

117. அளவியல் தொடக்க நூல்

மாணிக்கம்

*118. மானிடம்

119. பண்பாட்டுத் தொடக்கம்

120. கித்தியாவில் இயல்புவியல் வாழ்க்கை

சமூகவியல்

121. சமூகவியலின் அடிப்படைத் தொடர்புகள்

புதிதில்

122. ஐசியா—I

123. ஐசியா—II

124. இராஜ்யக் கலாத்தின் புதிதில்

*125. தொழில்நுட்ப அறிவு

*126. உட அறிமுகம்

*127. தொழில்நுட்ப அறிமுகம்

*128. தொழில்நுட்ப அறிமுகம்—தொழில்நுட்ப அறிமுகம்

*129. தொழில்நுட்ப அறிமுகம்—தொழில்நுட்ப அறிமுகம்

*130. புதிதில்—II

... ம. அ. தேவசேனாபதி,

... ம. அ. தேவசேனாபதி,

... கி. இராஜகங்கம்

... கோ. கோ. காதல்

... கி. ச. அப்பர்சாஸ்திரி

... ம. க. கோபாலசுந்தரன்

... கி. பி. சுப் பி. மனியம்

... எம். கி. கி. கி.

... கோ. கோ. காதல்

... கோ. கோ. காதல்

... கோ. கோ. காதல்

... கோ. கோ. காதல்

... கோ. கோ. காதல்

... கோ. கோ. காதல்

... கோ. கோ. காதல்

... கோ. கோ. காதல்

... கோ. கோ. காதல்

... கோ. கோ. காதல்

... கோ. கோ. காதல்

... கோ. கோ. காதல்

... கோ. கோ. காதல்

... கோ. கோ. காதல்

... கோ. கோ. காதல்

... கோ. கோ. காதல்

... கோ. கோ. காதல்

... கோ. கோ. காதல்

... 6 00

... 6 00

... 8 50

... 2 50

... 4 75

... 5 50

... 3 50

... 10 50

... 9 50

... 8 75

... 8 50

... 8 50

... 6 25

... 9 00

... 3 00

... 3 25

... 6 00

...

...

...

...

...

...

...

...

புதிதியம் (தொடர்ச்சி)			
*131. செவ்வழைப் புதிதியம்	...	சு. ஜெயச்சந்திரன்	5 50
*132. வகைப்பாடுகள்	...	வி. எஸ். அனந்தபதிமுனையன்	4 75
*133. அழகுநிலைகள்	...	செ. கிராமசாமி	6 50
134. காவல்துறை நிலை—I	...	செ. செல்வநாதசாமி	10 00
135. " II	...	"	5 00
*136. காவல்துறை நிலை—I	...	திருமதி. கிராதர்	10 00
*137. " II	...	"	8 00
138. வயிற்றுக்கு ஒர் அறிவுரை	...	செ. கிராமசாமி	11 00
*139. புதிதானவர்கள்	...	சி. விஸ்வநாதன்	4 75
140. பொருள்கள் புதிதானவர்கள் புதிதானவர்களும்	...	செ. கிராமசாமி	6 00
141. சிவனின் வான்குடி புதிதியம்—I	...	எஸ். மானிக்கம்	9 50
142. " II	...	எம். சந்திரன்	12 00
143. " III	...	சி. எஸ். நரசிம்மன்	5 75
புதிதியம்			
*144. புதிதியம்—அறிவுரை	...	சு. காவல்துறை	10 75
145. புதிதியம்—முறைகள்—I	...	செ. கிராமசாமி	10 00
146. " II	...	கிராமசாமி	14 00
147. தம்மைச் சுற்றிபுள்ள பொருள்கள்	...	தி. வி. எட்கிமிநாசியன்	6 50
உயர் கணிதம்			
*148. அழகுநிலை கணிதம்	...	பு. செ. மானிக்கவாசகம்	4 25
*149. வகைப் புதிதானவர்கள்	...	"	3 00
*150. தொலைவு கணிதம்	...	தி. காவல்துறை	3 25
விவரங்களை			
*151. விவரங்களை	...	பு. ம. அனந்தபதிமுனையன், கிரா. முருகேசன்	12 00

* மூலக்க (Original Book)

கூட்டுறவு

163. உலகக் கூட்டுறவு இயக்கம்

சட்டம்

*163. குத்தலியல் சட்டம்

பொது நூல்கள்

170. மகாத்மா காந்தி

171. விவசாயப் புரட்சி

*172. சோமக் கைநூல்

*173. முந்தையச் சொந்தக் கையெழுத்துச் சித்திரம்

*174. உணவுத் திட்டம்

*175. பன்னி திருவரக அமைப்பு—அடிப்படைக் கருத்துகள்

புதுமுக (P.U.C.) வகுப்புகளுக்குரியவை

*176. உலக வரலாறு

*177. பொருளாதாரம்

*178. வணிகவியலுக்கு ஒர் அறிமுகம்—I

*179. II

*180. பொருளியல்

*181. புதுமுகப் பொருளியல்

*182. புதுமுக வகுப்புக் கணிதம்—I

*183. II

*184. புதுமுக வகுப்புக் கணித நூல்—I

* நூல் மூலம் (Original Book)

...	ஆ. வெளிமணி	...	5	50
...	எம். சண்முகசுப்பிரமணியம்	...	10	00
...	சரஸ்வதி சமீபகவயிர்	...	3	25
...	வி. கார்த்திகேயன்	...	8	00
...	சு. சுப்பிரமணியம்	...	2	50
...	எஸ். ஸ்ரீ. பாலகிருஷ்ணமணிபுத்	...	9	00
...	தி. வெங்கட் கிருஷ்ணமணிபுத்	...	4	50
...	எஸ். சத்தானம், எம். ஏ. முனையன்	...	6	25
...	க. ஸ்ரீ. கிராமச்சத்திரன்	...	4	00
...	ஜி. சித்தம்பரம்	...	2	75
...	கு. குருநாதன் பிச்சை	...	2	50
...	2	25
...	டாக்டர் இ. திருநாளை சம்பந்தம்,	...	7	50
...	ஸ்ரீ. நாகராஜன்	...	6	00
...	டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜன்	...	7	00
...	சே. ராஜகோபாலன்	...	3	00
...
...	டி. கோவிந்தராஜன், முத்துசாமி	...	7	00

பொருளியல் (Economics)

*201.	மின்விக-சாத்தவியம்—சிறப்புப் பாடம் (Electricity and Magnetism-Major (Book I)	...	4 75
*202.	" "	...	4 50
*203.	" "	...	4 25
*204.	ஒளியியல்—சிறப்புப் பாடம் (Light-Major)	...	7 75
*205.	பொதிதம்—தீர்மானப்பாடம் (பகுதி - 2) (Physics-Ancillary) முதல் பகுதி	...	6 00
*206.	பொதிதம்—தீர்மானப்பாடம் (பகுதி - 2) தீர்மானப்பாடப் பகுதி	...	4 50
*207.	பொது பொதிதம்—சிறப்புப் பாடம் (General Physics-Major)	...	4 50
*208.	நவீன பொதிதம்—சிறப்புப் பாடம் (Modern Physics-Major)	...	6 75
*209.	ஒலி தாடம்—சிறப்புப் பாடம் (Sound-Major)	...	5 00
*210.	கிப்பகவியல்—சிறப்புப் பாடம் (Dynamics-Major)

Gardner (Chemistry)

*211. பெருமளவு கனம் வேதியியல்—தலைப் பட்டம்
(Practical Inorganic Chemistry).
Ancillary .. பட்டப் படிப்பதற்குரியவை .. 2 00

**new job (Original Book)*

வேதியியல் (தொகுப்புகள்)	பகுதி	பக்கங்கள்
*212. செயற்கை எலி வேதியியல்—சிறப்புப் பகுதி (Practical Inorganic Chemistry-Major)	...	2 25
*213. பொது வேதியியல்—சிறப்புப் பகுதி (Physical Chemistry-Major) (Book I)	...	4 50
*214. பொது வேதியியல்—சிறப்புப் பகுதி (Physical Chemistry-Major) (Book II)	...	3 50
*215. எலி வேதியியல்—தலைப்புப் பகுதி (Inorganic Chemistry-Ancillary)	...	6 50
*216. எலி வேதியியல்—சிறப்புப் பகுதி (Inorganic Chemistry-Major) (Book I)	...	4 00
*217. எலி வேதியியல்—சிறப்புப் பகுதி (Inorganic Chemistry-Major) (Book II)	...	4 25
*218. பொது வேதியியல்—தலைப்புப் பகுதி (General Physical Chemistry-Ancillary)	...	4 75
*219. செயற்கை வேதியியல்—சிறப்புப் பகுதி (Theoretical Chemistry-Major) (Book I)	...	4 50
*220. செயற்கை வேதியியல்—சிறப்புப் பகுதி (Theoretical Chemistry-Major) (Book II)	...	3 75
*221. செயற்கை வேதியியல்—தலைப்புப் பகுதி (Practical Organic Chemistry-Major)	...	3 50
*222. செயற்கை வேதியியல்—தலைப்புப் பகுதி (Practical Organic Chemistry-Ancillary)	...	5 00
*223. செயற்கை வேதியியல்—தலைப்புப் பகுதி (Organic Chemistry-I)	...	3 00
*224. செயற்கை வேதியியல்—தலைப்புப் பகுதி (Organic Chemistry-Part-I-Book I)	...	4 75
*225. செயற்கை வேதியியல்—தலைப்புப் பகுதி (Organic Chemistry-Part-I-Book II)	...	3 25

*226. கரிம வேதியியல்—பகுதி-2 (முதல் புத்தகம்) (Organic Chemistry-Part-II-Book-I)	...	"	...	5 75	
*227. " " (Book II)	...	"	...	6 00	
கணிதம் (Mathematics)					
*228. இயல் கணிதம்—சித்யுப் பாடம் (Book-I) (Algebra-Major)	...	டி. கோவிந்தராஜன், கே. முத்துசாமி	...	4 25	
*229. " " (Book II)	...	"	...	3 25	
*230. நெகடுமுறை வரை கணிதம்—சித்யுப் பாடம் (Pure Geometry-Major)	...	"	...	2 00	
*231. வரைக் கணிதம்—சித்யுப் பாடம் (Numerical Mathematics-Major)	...	ஆர். மகாதேவன்	...	5 50	
*232. திரிசுரண கணிதம்—சித்யுப் பாடம் (Trigonometry-Major)	...	எம். எம். பிரபாசாமி	...	3 25	
*233. கணிதம்—திரைப் பாடம் (Mathematics-Ancillary)	...	வி. அரங்கநாதன்	...	6 00	
*234. திவ்யியல்—சித்யுப் பாடம் (Statistics-Major)	...	ஆர். அனுமத்தையர்	...	5 00	
*235. முப்பரிமாணப் பகுமுறை வரை கணிதம்— சித்யுப் பாடம் (Analytical Geometry-3 Dimensions- Major)	...	கே. பிரஜேசுவரன்	...	2 75	
*236. வெக்டர் கணிதமும் அதன் பயன்பாடுகளும்— சித்யுப் பாடம் (Vector Algebra-Major)	...	கே. சிவசுப்பிரமணியன்	...	2 00	
*237. கணிதம்—திரைப் பாடம்—பகுதி-2 (Mathematics-II-Ancillary)	...	ஆர். மகாதேவன்	...	5 75	
*மூல நூல் (Original Book)	...	ஆர். சிவசுப்பிரமணியன்	...		

M.
L.

கணிதம்—(தொடர்ச்சி)

*238.	வானியல்—மூலக் புத்தகம்—சிதம்பர் பாகம் (Astronomy—Major Book-I)	திரு. தி. கோவிந்தராசன், திரு. செ. முத்துசாமி	ரூ. 5 50
*239.	வானியல்—திரைப்படப் புத்தகம் (Astronomy-Book-II)	"	... 3 75

புள்ளியியல் (Statistics)

*240.	புள்ளியியல்—தலைநகர் பாகம் (Statistics-Ancillary)	எஸ். கருப்பையா	... 3 50
-------	---	----------------	----------

விலக்கியல் (Zoology)

*241.	மூதகெழுப்பந்தைய-1—சிதம்பர் பாகம் (Invertebrata-Major)	ஆர். முருகேசன்	... 11 50
*242.	"	திருமதி. எஸ். கே. வர்ணி	... 11 25
*243.	மூதகு நாணுக்களைய-1—சிதம்பர் பாகம் (Chordata Upto and including Reptilia (Major) (Book-I)	திருமதி. சாணி சுந்தராமி	... 8 00
*244.	"	"	... 9 75
*245.	மூதகுத் தண்ணீர்க்களைய-2—சிதம்பர் பாகம் (Chordata-Major)	திருமதி. திருவுண்ணாமணி நாராயணன்	... 11 75
*246.	மூதகெழுப்பந்தைய-2—கருணியல்—சிதம்பர் பாகம் (Vertebrate Embryology Major)	எஸ். ஆர். சாமி	... 9 00
*247.	மூதகெழுப்பந்தைய-3—தலைநகர் பாகம் (Invertebrata-Ancillary)	எஸ். கிருஷ்ணமூர்த்தி	... 9 00
*248.	மூதகு நாணுக்களைய—தலைநகர் பாகம் (Chordata-Ancillary)	டி. சோது	... 10 00
*249.	செல்லியல்—சிதம்பர் பாகம் (Cytology-Major)	எஸ். கிருஷ்ணமூர்த்தி	... 5 50

விவரம் (தொடர்ச்சி)

*250.	மரபியல்—சிதம்புப் பாகம் (Genetics-Major)...	பெ. மர. அண்ணாமலை	...	5	25
*251.	குழந்தையியல்—உடல் செயலியல்-1 சிதம்புப் பாகம்		...	4	75
*252.	(Ecology & Physiology-Major) (Book-I)...	டி. ஆர். கிருஷ்ணன்	...	6	50
	குழந்தையியல்—உடல் செயலியல்-2 சிதம்புப் பாகம்		...	6	25
*253.	(Ecology & Physiology-Major) (Book-II)...		
	பரிணாமம் (Evolution)		
தாவரவியல் (Botany)					
*254.	தாவர செலி உச்சமைப்பியல்களும் வளமும் பரிணாமம்—சிதம்புப் பாகம் (Morphology, Taxonomy and Anatomy-Major)	11	00
*255.	தாவரப் புற அமைப்பியல்—சிதம்புப் பாகம் (Plant Morphology-Major)	9	25
*256.	தாவர உச்சமைப்பியல்—சிதம்புப் பாகம் (Plant Anatomy-Major)	7	25
*257.	தாவரவியல் அறிவை—சிதம்புப் பாகம் (Plant Physiology-Major)	9	50
*258.	தாவரவியல்—தண்டைப் பாகம் (Thallophytes, Bryophytes, Pterido- phytes & Gymnosperms for Ancillary)...	பர. இராஜசேகர்	...	4	50
*259.	தாவர குழந்தையியல், அழிவல்—உயிர் மரபியல், மரபியல்—தண்டைப் பாகம் (Physiology, Ecology, Heredity & Evolution-Ancillary)	4	00

* மூல நூல் (Original Book)

தாவரவியல்—(தொடர்ச்சி)

*260.	சூழ்நிலையியல், பரிணாமம், மரபியல்— (Ecology, Evolution & Genetics-Major)...	...	6	25
*261.	பெரிடோஸ்பைட்டர், இம்மோகோப்சிடே— (Pteridophytes & Gymnosperms-Major)...	...	10	25
*262.	தரோஸ்பைட்டர் (பாக்டிரோமியாக்கள்) —சிதம்பூர் பாக்டிரோமியாக்கள் (Thallophyta-Algae & Fungi-Major)	9	00
*263.	தாவர வகைப்பாட்டியல்—சிதம்பூர் பாக்டிரோமியாக்கள் (Plant Taxonomy-Major)	10	50
*264.	பிரைமோஸ்பைட்டர்—சிதம்பூர் பாக்டிரோமியாக்கள் (Gymnosperms-Major)	6	00

*மூல நூல் (Original Book)

